11 класс

5. $\begin{cases} xy-2y=x+106 \\ yz+3y=z+39 \\ zx+3x=2z+438 \end{cases}$

$\begin{cases} y(x-2)=x+106 \\ y(z+3)=z+39 \\ x(z+3)=2z+438 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\frac{x+106}{x-2} \\ y=\frac{z+39}{z+3} \\ x(z+3)=2z+438 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\frac{z+39}{z+3} \\ x=3z+11 \\ x(z+3)=2z+438 \end{cases}$

$\begin{cases} z=9 \\ x=3z+11 \\ y=\frac{z+39}{z+3} \end{cases}$ или $\begin{cases} z=-15 \\ x=3z+11 \\ y=\frac{z+39}{z+3} \end{cases}$

$\begin{cases} z=9 \\ x=38 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} z=-15 \\ x=-34 \\ y=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=38 \\ y=4 \\ z=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-34 \\ y=-2 \\ z=-15 \end{cases}$

1) $y=\frac{x+106}{x-2}$ $y=\frac{z+39}{z+3}$

$y=y$

$\frac{x+106}{x-2}=\frac{z+39}{z+3}$

$(x+106)(z+3)=(z+39)(x-2)$

$\cancel{xz}+106z+3x+318=\cancel{xz}+39x-2z-78$

$108z-36x+396=0$

$x=\frac{108z+396}{36}$

$x=3z+11$

2) $x=3z+11$

$x(z+3)=2z+438$

$(3z+11)(z+3)=2z+438$

$3z^2+9z+11z+33=2z+438$

$3z^2+18z-405=0$

$z^2+6z-135=0$

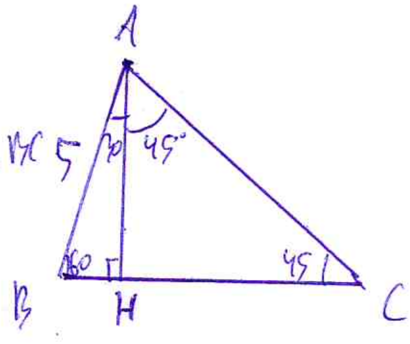
$D=36+540=576$

$z_1=\frac{-6+24}{2}=9$

$z_2=\frac{-6-24}{2}=-15$

Ответ: $(38;4;9)$; $(-34;-2;-15)$

1.



1) $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=75^\circ$

2) Проведем высоту $AH \perp BC$

3) $\triangle BAH$ - прямоуг.

$\angle BAH=90-\angle A=30^\circ$

$BH=\frac{1}{2}AB=2{,}5$

$AH^2=AB^2-BH^2=25-\left(\frac{5}{2}\right)^2=25-\frac{25}{4}=\frac{75}{4}$

$AH=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

4) $\triangle AHC$ - прямоуг. и равнобедр., т.к. $\angle C=45^\circ \Rightarrow \angle HAC=90-\angle C=45^\circ$

$HC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

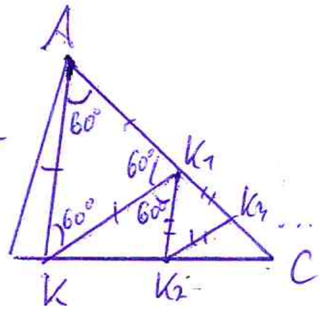
$AC^2=HC^2+AH^2=2AH^2=\frac{150}{4}$

$AC=\sqrt{\frac{150}{4}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

Мы нашли AC. Теперь покажем пример, удовлетворяющий условию задачи

Пусть муха в первый раз вылетела из точки A в точку K на прямой BC так, что $\angle KAC = 60^\circ$

Тогда следующей прямой она прилетит в точку K_1 так, что $\angle AKK_1 = 60^\circ$ (по усл.)



$\triangle AKK_1$ - равносторонний, т.к все его углы 60°

Отметим следующие прилеты мухи, как точки K_2, K_3 ...

$\angle K_2K_1K_3 = 60^\circ$ $(180 - \angle AK_1K - \angle KK_1K_2)$ $\angle KK_1K_2 = 60$ по усл.

$\angle K_1K_2K_3 = 60^\circ$ по усл.

$\triangle K_1K_2K_3$ равностор., т.к все углы 60°

Таким образом, муха следующими своими полетами будет образовывать равносторонние $\triangle$.

Назовем „путем от A до K_1" расстояние, которое муха пролетела, добираясь от A до K_1, т.е ~~раст~~ путь от A до K_1 равен $AK + KK_1 = 2AK_1$ т.к $\triangle AKK_1$ - р... путь от K_1 до K_3 равен $K_1K_2 + K_2K_3 = 2K_1K_3$

Так, каждый раз попадая на AC муха будет все ближе к C т.е ее путь будет стремиться к ~~длине~~ удвоенной длине AC, т.к каждый путь в два раза больше отрезка. Но удвоенная длина AC это $\frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 2 = 5\sqrt{6}$, что больше, чем 12 т.к $(5\sqrt{6})^2 > (12)^2$ $150 > 144$. Следовательно, прилетя муха через какое-то время пролетит расстояние больше ...

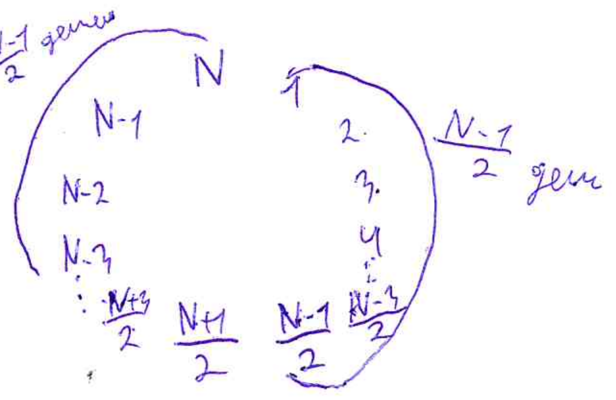
Ответ: может.

3. Заметим, что ребенок не может подарить подарок себе. Всего N детей, каждый подарил различное кол-во подарков, но не больше $N-1$, т.е, каждый из них подарил какое-то число из набора: $0, 1, 2, 3 \dots, N-1$. Т.е всего было подарено подарков $S_N = \frac{(0+N-1) \cdot N}{2} = \frac{(N-1) \cdot N}{2}$, т.к набор $0, 1, 2 \dots, N-1$ - арифм. прогрессия. Но все получили поровну подарков, т.е $\frac{(N-1) \cdot N}{2} : N = \frac{N-1}{2}$. => если N - четное, то $\frac{N-1}{2}$ - не является целым. Но $\frac{N-1}{2}$ - число подарков, т.е число целое. => N не может быть четным. Теперь покажем, что все нечетные $N > 1$ подходят (удовлетворяют) условию.

Построим алгоритм того, как дети должны дарить подарки, для удовлетворения условию, на следующей странице.

3. (Продолжение)

Расставим детей как показано на рис. → и пронумеруем их так, что →



N - подарил N-1 подарков
N-1 - подарил N-2 подарков
N-2 - подарил N-3 подарков
⋮
$\frac{N+1}{2}$ - подарил $\frac{N-1}{2}$ - подарков
⋮
4 - подарил 3 подарка
3 - подарил 2
2 - подарил 1
1 - подарил 0

Теперь алгоритм: N - дарит всем; N-1 дарит всем, кроме 1; N-2 - дарит всем, кроме 1 и 2; N-3 дарит всем, кроме 1, 2, 3 и т.д., $\frac{N+1}{2}$ дарит всем, кроме 1, 2, 3, 4... $\frac{N-1}{2}$ ~~и т.д., 4 дарит~~. Пока остановимся на этом и посмотрим сколько подарков получили дети N, N-1, N-2 ... $\frac{N+1}{2}$. ~~N получил~~ Всего их (детей в этом рассматриваемом ряду) $\frac{N+1}{2}$. N получил подарки всех, кроме себя, т.е $\frac{N-1}{2}$ подарков, N-1 также получил подарки от всех, кроме себя, т.е $\frac{N-1}{2}$ подарков, и так каждый ребенок от N до $\frac{N+1}{2}$. Теперь рассмотрим детей с номерами $\frac{N-1}{2}$ и всех за ним до номера 1. $\frac{N-1}{2}$ получил подарки от всех детей с номерами от N до $\frac{N+1}{2}$, не включая $\frac{N+1}{2}$, т.е получил $\frac{N-1}{2}$ подарков. ~~Теперь рассмотрим~~ Теперь рассмотрим как дарят подарки дети с номерами от $\frac{N-1}{2}$ до 1 (смотрим по кругу). Пусть каждый из них подарил всем детям, стоящим после него до 1, и $\frac{N-1}{2}$ дарит 1, 2, 3, 4 ... $\frac{N-3}{2}$, и т.д., 4 дарит 1, 2 и 3, 3 дарит 1 и 2, 1 не дарит никому. Теперь посчитаем, сколько каждый из них получил подарков. $\frac{N-1}{2}$ уже получил $\frac{N-1}{2}$ подарков. $\frac{N-3}{2}$ получил и от всех ребят из набора от N до $\frac{N+5}{2}$, т.е $\frac{N-3}{2}$ подарков и еще один от $\frac{N-1}{2}$, т.е. получил $\frac{N-3}{2}+1=\frac{N-1}{2}$ подарков. И каждый, также получил $\frac{N-1}{2}$ подарков, легко убедиться, рассматривая детей в обратном порядке. Так 1 получил подарок только от N из ряда от N до $\frac{N+1}{2}$, но получил от всех из ряда от $\frac{N-1}{2}$ до 1, кроме себя, т.е. всего $\frac{N-1}{2}-1+1=$ 2 получил на 1 больше, чем ~~первый~~ 1-ый ребенок от ряда от N до $\frac{N+1}{2}$, но получил на 1 меньше от ряда от $\frac{N-1}{2}$ до 1, т.к 1 ему не дарил, т.е тоже получил $\frac{N-1}{2}$ подарков. Таким образом, каждый ребенок получает $\frac{N-1}{2}$ подарков при всех нечетных N>1, т.е равное число подарков и каждый дарит

3 сл

различное число от 0 до N-1. Т.е. условие выполняется
Ответ: при всех нечетных $N>1$

№.4. Докажем, что точки на плоскости образуют выпуклый пятиугольник. Предположим, что это не так, тогда какая-то точка лежит внутри трех других →  . Тогда образуется треугольник трех других с площадью больше 2, т.е. с площадью $> 2+2+2=6$. Это в начале мы предполагали противное, забыли написать! => Точки на плоскости образуют выпуклый пятиугольник.

2. Заметим, что поскольку $\bar{x}_2 < x_2$, то $x_2 > x_1$, иначе было бы наоборот. Иначе $\bar{x}_2$ было бы больше x_2. Аналогично $\frac{x_1+x_2}{2} < x_3$, что следует из того, что $\bar{x}_3 > x_3$. Таким же образом получаем, что $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} < x_4$, $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} < x_5$, $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} < x_6$, а дальше $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6} > x_7$, $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\dots x_k}{k} > x_{k+1}$, при k от 7 до 11, т.е. $\bar{x}_k > x_k$ при k от 7 до 12. => От x_1 до x_6 мы каждый раз добавляли большее число произведенного товара, а после x_6 добавляли меньшее число => $\bar{x}_6$ наибольшее из всех $\bar{x}_k$ => в 6 месяц

Ответ: в 6 месяц.