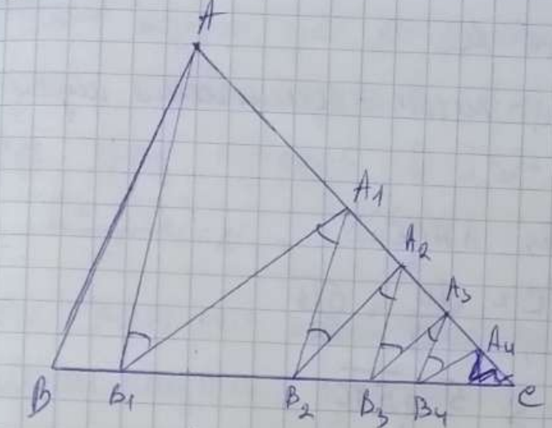
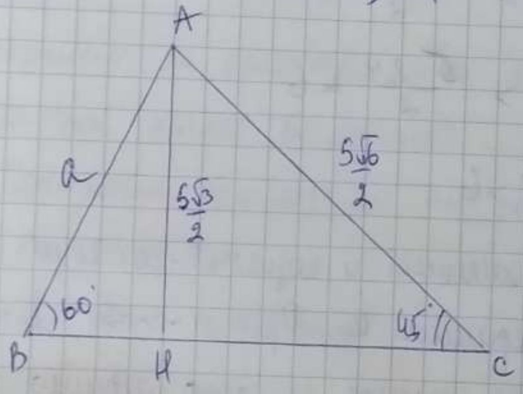
1.





Движение зависит угла, но можно рассмотреть случай, когда угол вылета под углом 60° к стороне AC. Покажем, что в этом случае длина траектории мухи может оказаться больше 12.

$\triangle AB_1A_1$ - равносторонний

Пусть $A_1, A_2, A_3 \ldots$ – точки столкновения мухи со стороной AC

Пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots$ – точки столкновения мухи со стороной BC.

Пусть AH – высота $\triangle ABC$

$AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $AC = \frac{AH}{\cos 45} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

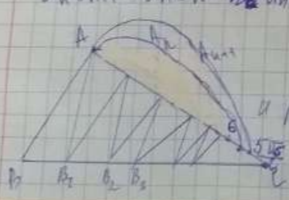
Сравним $\frac{5\sqrt{6}}{2} > \frac{5\cdot\sqrt{5,76}}{2}$

$$\frac{5\sqrt{6}}{2} > \frac{5\cdot 2,4}{2} = 6$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{2} > 6$$

Муха летит и отлетает и подлетает сколько угодно близко к вершине C. При $n \to \infty$, $A_n \to C$, так, что найдется такое n, что можно пришеть

$A_n B_{n+1} = A_n B_n = A_n A_{n+1}$



$AA_n > 6$

и расстояние пролёта $2AA_n > 12$. Ответ может

3. Каждый ребенок может подарить от 0 до $N-1$ подарка, где N – детей и все подарили разное число подарков. Всего они подарили друг другу подарков: $0+1+2+\ldots+(N-2)+(N-1) = \frac{0+(N-1)}{2}\cdot N = \frac{N(N-1)}{2}$

Все получили поровну, то каждый должен получить $\frac{N-1}{2}$, значит N – нечетное число

Покажем на примере, что при любом N нечетное такое возможно

Построим пример по индукции:

База: $N=3$,

Пусть $N>3$ – нечетное

Пусть: $N-2$ ребенка, стоящих по кругу, дарят друг другу $0, 1, 2, \ldots, (N-3)$ подарков так, чтобы каждый получил $\frac{N-3}{2}$ подарка. Еще по одному каждый подарит соседу слева и еще все подарят по одному подарку двум пришедшим детям – один получит $\frac{N-3}{2}$ подарков, а другой их 1 больше. И, поэтому, тот, который получит больше, дарит один подарок другому. Тогда все дети получат по $\frac{N-1}{2}$ подарков и

все получат равное количество.

Ответ: Возможно ~~[illegible]~~ для N-нечетное

2. Пусть производство товара вычисляется так

$\bar{x}_1 = x_1$

$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

$\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$

$\vdots$

$x_{12} = \frac{1}{12}(x_1 + x_2 + \dots + x_{12})$

Известно $\bar{x}_k < x_k$ при k от 2 до 6, тогда

$x_1 < x_2$

$x_1 + x_2 < 2x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 < 3x_4$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 4x_5$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 5x_6$ $(*)$

Докажем, что $\bar{x}_k > x_k$ при k от 7 до 12 $(**)$

$x_1 + x_2 + \dots + x_6 > 6x_7$

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7 > 7x_8$

$x_1 + x_2 + \dots + x_8 > 8x_9$

$x_1 + x_2 + \dots + x_9 > 9x_{10}$

$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} > 10x_{11}$

$x_1 + x_2 + \dots + x_{11} > 11x_{12}$

Перепишем $(*)$:

$$6x_6 > x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

в $(**)$: $6x_6 + x_6 > 6x_7$

$$6x_6 > 6x_7$$

$$x_6 > x_7$$

аналогично

$$x_6 > x_8$$

$$x_6 > x_9$$

$$x_6 > x_{12}$$

Учитывая $(*)$, получим:

$$\bar{x}_6 > \bar{x}_5$$

$$\bar{x}_6 > \bar{x}_4$$

$$\bar{x}_6 > \bar{x}_3$$

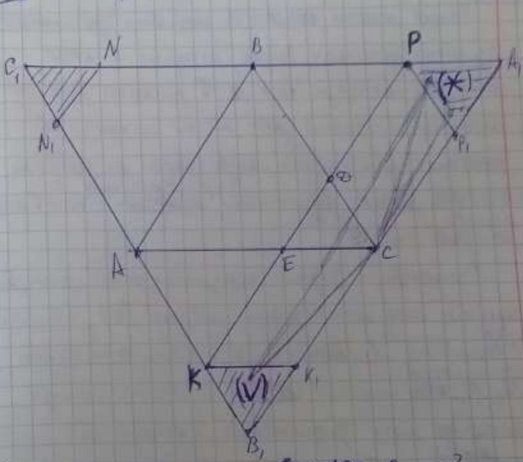
$$\bar{x}_6 > \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_6 > \bar{x}_1$$

Следовательно $\overline{x_6}$ – среднее производство товара с начала года было наибольшим в 6-м месяце, т.е. в июне.

Ответ: в июне.

4 Рассмотрим $\triangle ABC$ с наибольшей площадью



Будем считать, что $S_{ABC} < 3$.

Построим $\triangle A_1B_1C_1$ так, что $AC_1 = AB_1$ (A – середина B_1C_1)

$CB_1 = CA_1$ (C – середина B_1A_1)

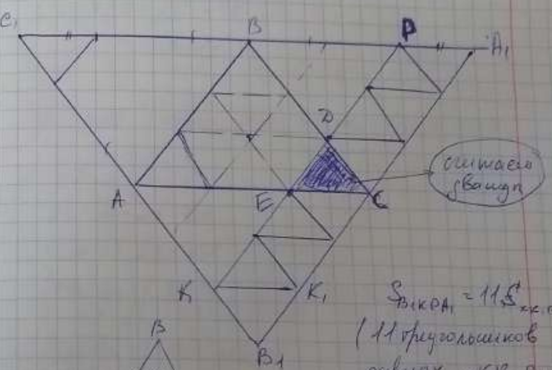
$BC_1 = BA_1$ (B – середина C_1A_1)

Итак, три точки A, B, C, а две еще точки должны лежать в этом треугольнике, иначе одна из них будет с данными точками образовывать больший площади.

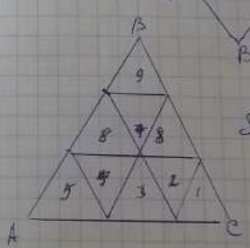
Также можно отметить, что эти две точки не могут оказаться близко находиться к $\triangle ABC$, так как площади всех $\triangle$-в должны быть не меньше 2. Значит эти точки находятся в областях выделенной штриховкой на рисунке, т.е. это области возможного ~~[illegible]~~ расположения оставшихся двух точек.

Рассмотрим случай попадания этих точек. Например, они лежат в одной области (*), т.е. рядом с вершиной A_1. ~~Тогда~~ Пусть назовем эти точки M и M_1, ~~[illegible]~~ получим ~~[illegible]~~ $\triangle MCM_1$, тогда площадь этого треугольника меньше 2.

~~[illegible]~~ $S_{CMM_1} \le S_{PA_1C} \le \frac{1}{3} S_{ABC}$. Значит точки в разных областях. Например, M в области рядом с точкой A_1 (*), а M_1 в области рядом с точкой B_1 (V). Заметим $S_{MM_1C} \le$ сумме площадей участков треугольников MM_1C, попавших в ~~[illegible]~~ параллелограммы A_1BEC и B_1KDC и соответственно каждая из этих площадей меньше или равна половине площадей соответствующих параллелограммов. Получим, что $S_{MM_1C} <$



$S_{B_1KPA_1} = 11 S_{KK_1B_1}$
(11 треугольников равных $\triangle KK_1B_1$)



$S_{ABC} =$ (9 треугольников) $= 9 S_{DEC}$

$S_{MM_1C} \le \frac{1}{2} S_{B_1KDC} + \frac{1}{2} S_{A_1DEC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{1}{9} S_{ABC} = \frac{2}{3} S_{ABC} < 2$. Противоречие

5. $\begin{cases} xy - 2y = x + 106 & (1) \\ yz + 3y = z + 39 & (2) \\ zx + 3x = 2z + 438 & (3) \end{cases}$

Из (1) $x = \frac{106+2y}{y-1}$ Из (2) $z = \frac{39-3y}{y-1}$

При $y \neq 1$ (иначе $x - 2 = x + 106$; $-2 \neq 106$)

В (3)

$zx + 3x = 2z + 438$

$x(z+3) - 2z = 438$

$\left(\frac{106+2y}{y-1}\right)\left(\frac{39-3y}{y-1} + 3\right) - 2\left(\frac{39-3y}{y-1}\right) = 438$

$\left(\frac{106+2y}{y-1}\right)\left(\frac{39-3y+3y-3}{y-1}\right) - \frac{78-6y}{y-1} = 438$

$\frac{(106+2y)\cdot 36}{(y-1)^2} - \frac{78-6y}{y-1} - 438 = 0$

$\frac{3816+72y}{(y-1)^2} - \frac{78-6y}{y-1} - 438 = 0$

$\frac{3816+72y - (78-6y)(y-1) - 438(y-1)^2}{(y-1)^2} = 0$

$\frac{3816+72y-(84y-6y^2-78)-438y^2+876y-438}{(y-1)^2} = 0$

$$\frac{3894-12y+6y^2-438y^2+876y-438}{(y-1)^2}=0$$

$$\frac{3456+864y-432y^2}{(y-1)^2}=0$$

$$432(-y^2+2y+8)=0$$

$$y^2-2y-8=0$$

$$D=4+32=36$$

$$y_{1,2}=\frac{2\pm6}{2}=4;-2$$

При $y_1=4$

$$x_1=\frac{106+2\cdot4}{4-1}=38 \qquad z_1=\frac{39-3\cdot4}{4-1}=9$$

При $y_2=-2$

$$x_2=\frac{106+(-2)\cdot2}{-2-1}=-34 \qquad z_2=\frac{39-3\cdot(-2)}{-2-1}=-15$$

Ответ: $(38;4;9)$ и $(-34;-2;-15)$