Задание №1.

Посчитаем длину AC по теореме синусов: $\frac{\sin 45^\circ}{|AB|} = \frac{\sin 60^\circ}{|AC|}$

$|AC| = \frac{|AB| \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{37,5}$

Покажем, что муха может пролететь расстояние, больше 12. Приведём пример. Пусть первая точка столкновения мухи со стеной будет A_1, вторая — A_2, ..., i-я — A_i.

Пусть муха полетит так, что $\angle CAA_1$ был 60°. Тогда ΔAA_1A_2, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$ и т.д. будут правильными. Тогда получается, что муха пролетит расстояние, в 2 раза большее, чем AC, т.к. $AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots = 2 \cdot (AA_2 + A_2A_4 + \ldots) = 2AC$

Значит, проделывает путь, равный $\sqrt{37,5} \cdot 2 > 6 \cdot 2 = 12$.

Что и требовалось доказать.

Задание №2.

Проверим, когда $\overline{x_i} > \overline{x_{i-1}}$

$$\frac{x_1 + \ldots + x_i}{i} > \frac{x_1 + \ldots + x_{i-1}}{i-1}$$

$(i-1)(x_1+\ldots+x_i) > i\,(x_1+\ldots+x_{i-1})$

$(i-1)\,x_i > x_1+\ldots+x_i$

$$x_i > \frac{x_1+\ldots+x_i}{i}$$

$x_i > \overline{x_i} > \overline{x_{i-1}}$

Это неравенство верно по условию для i от 2 до 6.

Аналогично докажем, что $\overline{x_i} < \overline{x_{i-1}}$

если $x_i < \overline{x_i}$ для i от 7 до 12, тогда получается:

$\overline{x_1} < \overline{x_2} < \ldots < \overline{x_6} > \overline{x_7} > \ldots > \overline{x_{12}}$

$x_1 < x_2 < \ldots < x_6 > x_7 > \ldots > x_{12}$.

Следует, что наибольшее производство товара приходится на 6-й месяц.

Доказать, что $x_6 > x_7$ можно и так:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 < 6x_6 \ (1) \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 > 7x_7 \ (2) \end{cases}$$

К неравенству (1) прибавим x_7.

$6x_6+x_7 > x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 > 7x_7$.

$6x_6 > x_1+x_2+\ldots+x_6 > 6x_7$.

$6x_6 > 6x_7$

$x_6 > x_7$.

Аналогично рассуждая, $x_1+\ldots+x_8 > 8x_8$

$6x_6+x_7 > x_1+\ldots+x_7 > 7x_8$

$6x_6 > 7x_8 - x_7 > 7x_8$

$7x_6 > 7x_8$

$x_6 > x_8$.

Задание №3.

~~Сумма подарков равна (N)~~

Каждый ребёнок мог сделать от 0 до $N-1$ подарка.

т.к. числа попарно различаются, то их N штук. И они принимают значения от 0 до $N-1$.

Сумма подарков равна $(N-1)N/2$.

Причём, очевидно, делится на $N \Rightarrow N$ — нечётно.

При $N=2k+1$ пример можно составить такой. Пронумеруем всех участников от 0 до $2k$. Пусть i-й должен сделать i подарков. Разбиваем всех на пары, кроме одного. И даём им номера: 1 и $2k$, 2 и $2k-1$, ..., k, $k+1$.

Для каждого i от 1 до k делим участников на две группы по i и $2k+1-i$ участников.

При этом получится, что тот, кто должен сделать i подарков, попал во 2-ю группу и должен сделать подарок каждому участнику 1-й группы.

А тот, кто делает $2k+1-i$ подарков попадает в первую группу, и он делает подарки всем, кто попал во вторую группу.

В конце концов получим, что каждый получит столько подарков, сколько пар — 12 штук.

Задание №4.

Так как по условию никакие три точки не лежат на одной прямой, то все точки образуют многоугольник.

Если многоугольник – треугольник, то $S_\Delta \geq 6$.

Если многоугольник – 4хугольник $ABCD$ и внутри него лежит точка P. Проведём диагональ AC. Пусть т. P оказалась внутри ΔACD.

$S_{ACD} \geq S_{PAD} + S_{PCD} \geq 4$

Если многоугольник – выпуклый пятиугольник.

Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке F.

$\rho(B, AE) < \rho(F, AE) < \rho(D, AE)$

Следовательно, $S_{ABE} < S_{AFE} < S_{ADE} \Rightarrow S_{AFE} \geq 2$.

Рассмотрим 1 случай, когда $AF:FC \geq 3$

$\frac{S_{BAD}}{S_{BCD}} = \frac{h_1}{h_2}$, где h_1 – высота ΔBAD, проведённая к BD;
h_2 – высота ΔBCD, проведённая к BD.

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AF}{FC} \geq 3 \Rightarrow S_{BAD} \geq 3$

Рассмотрим 2 случай, когда $AF:FC < \alpha$

Тогда $\frac{AF}{AC} < \frac{\alpha}{\alpha+1}$

Но число α является корнем ур-я $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$,

т.е. $\frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$. Тогда $\frac{AC}{AF} > \alpha$

$\frac{S_{ACE}}{S_{AFE}} > \alpha$

$S_{\Delta AFE} > 2 \Rightarrow$

$S_{ACE} \geq 1 + \sqrt{5} \Rightarrow$

$S_{ACE} \geq 3$

Задание №5.

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 \\ yz + 3y = z + 39 \\ zx + 3x = 2z + 438 \end{cases}$$

~~Сложив уравнения получим:~~

$$\cancel{xy + yz + zx + y + 2x - 3z = xy - 2y - x = 106.}$$

$$\begin{cases} (x-2)(y-1) = 108 \\ (y-1)(z+3) = 36 \\ (z+3)(x-2) = 432 \end{cases}$$

Перемножим эти уравнения

$$\begin{cases} ab = 108 \\ bc = 36 \\ ca = 432 \end{cases}$$

$$(abc)^2 = 108 \cdot 36 \cdot 432$$

$$(abc)^2 = 108 \cdot 36 \cdot 108 \cdot 4$$

$$(abc)^2 = (108 \cdot 6 \cdot 2)^2$$

$$abc = 108 \cdot 6 \cdot 2$$

$$\begin{cases} c = 12 \\ a = 36 \\ b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2 = 36 \\ y - 1 = 3 \\ z + 3 = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 38 \\ y = 4 \\ z = 9. \end{cases}$$