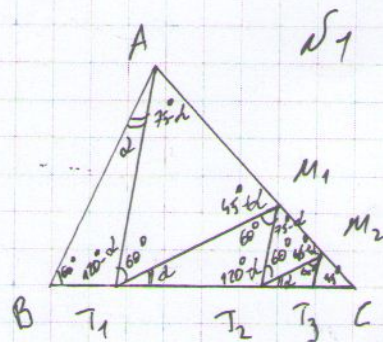




Дано: $\triangle ABC$; $\angle B = 60^\circ$; $\angle C = 45^\circ$

$$AB = 5 \text{ см}; \angle AT_1M_1 = \angle T_1M_1T_2 = \angle M_1T_2M_2 = \angle T_2M_2T_3 = 60^\circ$$

Р-во: В какой-то момент

луча проведена больше 17 метров

Р-во: Пусть угол, под которым луча выходит

из A будет d . ($\angle BAT_1 = d$), тогда $\angle T_1AM_1 = 75^\circ - d$ (и.с. $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$),
а $\angle AM_1T_1 = 45^\circ + d$ (из $\triangle AM_1T_1$); $\angle BT_1A = 120^\circ - d$ (из $\triangle BT_1A$), тогда $\angle T_1M_1T_2 = d$
($\angle M_1T_1T_2 = 180^\circ - 60^\circ - 120^\circ + d$); $\angle T_1T_2M_1 = 120^\circ - d$ (из $\triangle T_1T_2M_1$); $\angle T_2M_1M_2 = x^\circ - d$
($\angle T_2M_1M_2 = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ - d$); $\angle T_2M_2M_1 = 45^\circ + d$ (из $\triangle T_2M_1M_2$). Кроме того
 $d \in (0^\circ; 75^\circ)$

1) Рассмотрим $\triangle ABT_1$: $\frac{\sin 60^\circ}{AT_1} = \frac{\sin(120^\circ - d)}{AB}$;

$$\frac{\sqrt{3}}{2AT_1} = \frac{\sin(120^\circ - d)}{5}; AT_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2\sin(120^\circ - d)}$$

2) Рассмотрим $\triangle AM_1T_1$: $\frac{\sin(75^\circ - d)}{M_1T_1} = \frac{\sin(45^\circ + d)}{AT_1}$;

$$M_1T_1 = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sin(75^\circ - d)}{2\sin(120^\circ - d) \cdot \sin(45^\circ + d)}$$

3) Рассмотрим $\triangle T_1M_1T_2$: $\frac{\sin d}{M_1T_2} = \frac{\sin(120^\circ - d)}{M_1T_1}$;

$$M_1T_2 = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sin(75^\circ - d) \cdot \sin d}{2\sin^2(120^\circ - d) \cdot \sin(45^\circ + d)}$$

4) Заметим, что $\triangle AT_1M_1$ и $\triangle M_1T_2M_2$ подобны относительно $\angle \Rightarrow$
нейтр лучи - убывающая геометрическая прогрессия, тогда

$$q = \frac{M_1T_2}{AT_1} = \frac{\sin(75^\circ - d) \cdot \sin d}{\sin(120^\circ - d) \cdot \sin(45^\circ + d)}$$

§1 (Тригонометрия)

$$5) S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$b_1 = A_1 + M_1 T_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2 \sin(120^\circ - d)} \left(\frac{\sin(75^\circ - d)}{\sin(45^\circ + d)} + 1 \right)$$

$$S = \frac{5\sqrt{3} (\sin(75^\circ - d) + \sin(45^\circ + d)) \cdot \sin(120^\circ - d) \cdot \sin(45^\circ + d)}{2 \cdot \sin(120^\circ - d) \cdot \sin(45^\circ + d) (\sin(120^\circ - d) \cdot \sin(45^\circ + d) - \sin(75^\circ - d) \cdot \sin d)} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3} \cdot (\sin(75^\circ - d) + \sin(45^\circ + d))}{2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(75^\circ - d) - \cos 165^\circ \cdot \cos(75^\circ - d) + \cos 75^\circ)} =$$

$$= 5\sqrt{3} \cdot \frac{2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos(15^\circ - d)}{2 \cdot \sin 120^\circ \cdot \sin 45^\circ} = 5\sqrt{6} \cdot \cos(15^\circ - d)$$

$$\text{то } 5\sqrt{6} \cdot \cos(15^\circ - d) > 12;$$

$$\text{или } \cos(15^\circ - d) = 1$$

$$\text{н. л. } d = 15^\circ$$

Ответ: да, можно

№ 2

Рассмотрим случай, когда $\bar{x}_k \geq x_k$

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \quad \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \geq x_k \quad | \cdot k$$
$$\sum_{i=1}^k x_i \geq x_k \cdot k$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k \geq k \cdot x_k$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i \leq (k-1)x_k \quad | : (k-1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}{k-1} \leq x_k$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}{k-1} = \bar{x}_{k-1} \Rightarrow \bar{x}_{k-1} \leq x_k \Rightarrow x_k = \bar{x}_{k-1} + a; a > 0$$

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} = \frac{(k-1)\bar{x}_{k-1} + x_k}{k} = \bar{x}_{k-1} + \frac{a}{k}; \text{ где } a \cdot k > 0 \Rightarrow \text{прибавление}$$

к среднему произведению до текущего месяца

Рассмотрим случай, когда $\bar{x}_k < x_k$, тогда аналогично рассуждая

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}{k-1} > x_k, \text{ тогда } x_k = \bar{x}_{k-1} - a$$

$$\bar{x}_k = \frac{(k-1)\bar{x}_{k-1} + x_k}{k} = \frac{k\bar{x}_{k-1} - a}{k} = \bar{x}_{k-1} - \frac{a}{k} \Rightarrow \text{прибавление}$$

к среднему произведению, или больше $k \Rightarrow$ максимум при $k=6$

Ответ: 6

№3

Вступились N детей. Из условия, что один ребенок не мог подарить больше одного подарка, а также не мог сделать подарок самому себе, можно сделать вывод, что максимум один человек мог подарить $N-1$ подарков. Из условия, что каждому дарил разное кол-во подарков можно сделать вывод, что кто-то не дарил подарков вообще, ведь всего n человек, а максимум подарков $N-1$ (каждое дарит 1 ребенок). Найдём общее кол-во подарков $0+1+2+\dots+k-2+n-1$ суммируем. Для N -го можно заметить, что таких кар, где общее число подарков на фанках (каждое дарит) будет k , $n \cdot k + \frac{n \cdot k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$, а $\frac{n \cdot k}{2}$ - это человек, который остался без пары, ведь у один не дарит подарков вообще. Для N -гоём числа подарков будет $n \cdot k$. Найдём кол-во подарков, которые приходится на 1 человека (обязательно целое). Для N -гоём $\frac{n \cdot k + \frac{n \cdot k}{2}}{n} = k + \frac{1}{2}$ - нецелое, противоречит условию. Для N -гоём $\frac{n \cdot k}{n} = k$. Условие не противоречит. Пример, что для N -гоём подходит. Разобьём всех детей на пары, по кол-ву подарков, которые они дарят, чтобы в сумме на фанках приходилось n подарков. Заметим, что парой для 0 не существует, ведь по договору n подарков не дарит никто. Этот человек не входит в пару, значит без него остаётся $n-1$ кол-во детей, которых можно разбить на пары. В каждой такой паре дети дарят обильный подарок, а остальные распределять на каждого оставшегося ребёнка по одному, тогда при распределении таким образом все получат ровно n подарков. Значит, у каждого n подарков не имеет такого распределения. Ответ: при N -гоём.

Diagram showing two horizontal lines, l and m , intersected by a transversal. The distance between the lines is labeled $3x$. The distance from line m to a point A is labeled $2x$. The distance between points A and B is labeled a .

№4 (продолжение)

Пусть какая-то точка лежит между прямыми AB и c . Тогда площадь, образованная этой точкой и отрезком a будет меньше двух, ведь высота этого треугольника, опущенного на отрезок AB будет меньше $2x$, а по заданию $x \cdot a = 2 \Rightarrow$ т.е. отрезок

меньше из 3-х оставшихся не может лежать внутри c .

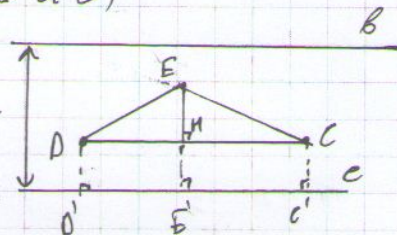
Пусть ~~какая-то точка лежит на~~ хотя бы одна точка лежит на b или $во$ вне, тогда S треугольника, образованного этой точкой и AB ; $S_1 \geq \frac{3x \cdot a}{2} \Rightarrow S_1 \geq 3$.

Рассмотрим $\triangle DEC$. Покажем, что в $\triangle DEC$ отрезок EH (т.е. D, E, C расположит между b и c)

и UD перпендикуляр E на c

лежит между перпендикулами D и C

(или совпадает с одной из них)



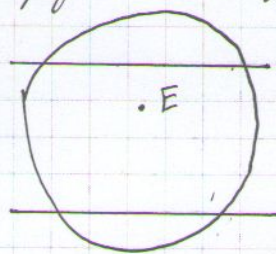
Пусть $EH > x$, тогда построим окружность с центром в E и радиусом

EH , т.е. $EH > x$, но прямая AC

не пересекает окружность. Значит

B -я лежит между A' и C'

и не совпадает ни с одной из них.



Противоречие. Значит найдется высота EH . Значит найдется отрезок $\geq 2a$

№4 (Продолжение)

Рассмотрим случай, если получили 2 т, то
прямая, проходящая через них $\parallel$ AB . При этом,
если возмем к этой отрезку из 5-ой точки
любой x , то этот отрезок больше $2a$

(эти 2 точки могут лежать как на c между b и c), тогда фигура, образованная этими 2-мя
точками и AB -треугольник. Тогда $S_{\triangle OAB} \geq \frac{2a \cdot a}{2} \cdot 2x = 2ax$.

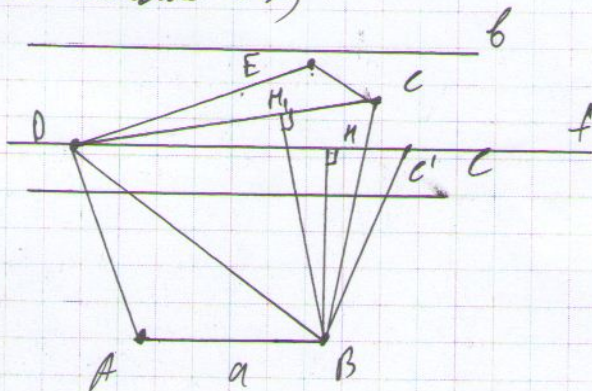
$S_{\triangle OAB} \geq 6$. Тогда, разбив диагональю эту треугольника,
то $3a \geq 3$ (по принципу Вернера) если высота больше x ,
то 5-я т. вых. за b ит.д. это уже доказано.

Пусть все 3 точки лежат между b и c . (или на b или
на c), если на c , то те больше $2a$).

Изообразим 3 точки,
но тогда они не лежат
на прямой $\parallel AB$.

Тогда обязательно найдется
та, которая ближе всего

к AB проведем прямую, проходящую через эту точку $\parallel AB$
($\perp$ AB). С помощью поверота изобразим на найденной прямой
($C, C'; OC = OC'$) проведем диагональ, соединяющую самую близкую
точку к AB с точкой C' (или C) (в данном случае
 DB) Рассмотрим $S_{\triangle OCB} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCB}$. Рассмотрим $S_{\triangle OCB'} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCB'}$.
Заметим, что $\triangle OCB'$ - трап. по дх $S_{\triangle OCB'} \geq 6$, тогда рассмотрим
 $S_{\triangle OCB}$ и $S_{\triangle OCB'}$.



Российская Федерация
Липецкая область
Департамент образования
администрации города Липецка

Муниципальное
бюджетное
общеобразовательное
учреждение
«Гимназия №1»
г. Липецка

398001, г. Липецк, ул. 8 Марта, 22/4
тел.: 25-01-37

№ _____
На № _____

№4 (Продолжение)

$$S_{DCB} = \frac{1}{2} BC_1 \cdot DC$$

$$S_{DC'B} = \frac{1}{2} BC_1' \cdot DC \quad \text{Заметим, что } BC_1' > BC_1$$

(т.к. в $\triangle H_1NB - H_1B$ - кат), тогда

$$S_{DCBA} > S_{DC'BA} \Rightarrow S_{DCBA} > 6, \text{ тогда по принципу}$$

функции аналогично $S_{какт-то}$ треугольника,
подсчитанного диагональю будет обязательно больше 3. т.е. д.

№5

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 & ① \\ yz + 3y = z + 39 & ② \\ zx + 3x = 2z + 438 & ③ \end{cases}$$

$$① \quad y(x-2) = x + 106$$

$$y = \frac{x+106}{x-2}$$

$$② \quad y(z+3) = z + 39$$

$$y = \frac{z+39}{z+3}$$

$$\frac{x+106}{x-2} = \frac{z+39}{z+3}$$

$$1 + \frac{x+108}{x-2} = 1 + \frac{36}{z+3}$$

$$\frac{x+108}{x-2} = \frac{36}{z+3}$$

$$36(x-2) = 108(z+3) \quad | : 36$$

$$x-2 = 3z+9$$

$$x = 3z+11$$

$$③ \quad z(z+3) = 2z + 438$$

$$(3z+11)(z+3) = 2z + 438$$

$$3z^2 + 9z + 11z + 33 = 2z + 438$$

$$3z^2 + 18z - 405 = 0 \quad | : 3$$

$$z^2 + 6z - 135 = 0$$

$$D = 36 + 540 = 576$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-6-24}{2} = -15 \\ x_1 = 3(-15) + 11 = -34 \\ y_1 = \frac{-15+39}{-15+3} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = \frac{-6+14}{2} = 9 \\ x_2 = 3 \cdot 9 + 11 = 38 \\ y_2 = \frac{9+39}{9+3} = 4 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -34, y_1 = -2, z_1 = -15; x_2 = 38, y_2 = 4, z_2 = 9$