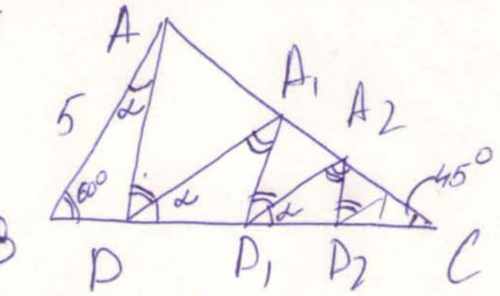
$\boxed{№1}$



по теореме синусов в Δ-ке ABC:

<u>1 страница</u>

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$$

подставим известные нам величины:

$$\frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ}$$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (по свойству углов в Δ-ке)

$$\sin 75^\circ = \sin\frac{150^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 150}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$AC = 5\,\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 5\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$BC = 5\,\frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

пусть α – угол, под которым муха пойдет по своему пути, по свойству внешнего угла $\angle ADD_1 = \angle DBA + \angle BAD \Rightarrow$

$\angle BAD = \angle A_1DA = \alpha$

$$\angle ADD_1 = \angle ADA_1 + \angle A_1DD_1$$

$$\angle ADA_1 = \angle DBA = 60^\circ$$

• траектория мухи: $AD + DA_1 + A_1D_1 + D_1A_2 \ldots = (AD + A_1D_1 + \ldots) + (DA_1 + \ldots D_1A_2 \ldots)$

• в свою очередь $\Delta A_1D_1D \sim \Delta D_1A_2D_2 \sim \ldots$ (по двум углам)

стоит заметить, что $\Delta ABD \sim \Delta DA_1D_1$ (по двум углам, 1 пр. подобия)

попробуем найти коэф. подобия

$$K = \frac{A_1C}{AC} = \frac{AC - A_1A}{AC} = 1 - \frac{A_1A}{AC}$$ ($\Delta ADC \sim \Delta A_1D_1C$ по двум углам)

$$A_1C = AC - AA_1 = 5\cdot\frac{\sin 60}{\sin 45} - AA_1$$

(ΔDA_1A)

$$\frac{DA_1}{\sin(75-\alpha)} = \frac{AA_1}{\sin 60} = \frac{AD}{\sin(45^\circ+\alpha)} \Rightarrow AA_1 = AD\,\frac{\sin 60}{\sin(45+\alpha)} =$$

$$\Rightarrow AD: \frac{5}{\sin(120-\alpha)} = \frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{BD}{\sin\alpha} \Rightarrow AD = 5\,\frac{\sin 60}{\sin(120-\alpha)}$$

(ΔABD)

(см на след. листе) →

$\boxed{№ 1}$ (продолжение) тогда

$$AA_1 = AD\frac{\sin 60^\circ}{\sin(45^\circ+\alpha)} = 5\frac{\sin 60}{\sin(120-\alpha)}\cdot\frac{\sin 60}{\sin(45^\circ+\alpha)}$$

вернемся к коэф. подобия

$$k = 1 - \frac{A_1A}{AC} = 1 - \cancel{5}\frac{\sin 60^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)}\frac{\sin 60^\circ}{\sin(45^\circ+\alpha)}\frac{\sin 45^\circ}{\cancel{5}\sin 60} =$$

$$= 1 - \frac{\sin 60^\circ \sin 45^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}$$

• траектория мухи:

$$AD + DA_1 + A_1D_1 \ldots = (AD + A_1D_1 + \ldots) + (DA_1 + D_1A_2) =$$

$$= AD\underbrace{(1+k+k^2+k^3\ldots)}_{\text{бесконечно убывающ. прогрессия}} + DA\underbrace{(1+k+k^2\ldots k^3\ldots)}_{\text{бесконечно убыв. прогрессия}}$$

$$=(AD+DA_1)\frac{1}{1-k};$$

$AD+DA_1 = ?$: $\quad \dfrac{DA_1}{\sin(75^\circ-\alpha)} = \dfrac{AA_1}{\sin 60^\circ} = \dfrac{AD}{\sin(45^\circ+\alpha)}$

$$DA_1 = AD\frac{\sin(75^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)} = 5\frac{\sin 60^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)}\frac{\sin(75^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)}$$

$$AD = 5\frac{\sin 60^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)}$$

$$AD+DA_1 = 5\frac{\sin 60^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)}\left(1+\frac{\sin(75^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)}\right) =$$

$$= 5\frac{\sin 60}{\sin(120^\circ-\alpha)}\left(\frac{\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(75^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)}\right) =$$

$$= 5\frac{\sin 60}{\sin(120^\circ-\alpha)}\,\frac{2\sin 60^\circ\cos(15^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)} =$$

$$= \frac{5\sin 60^\circ\cdot 2\sin 60^\circ\cos(15^\circ-\alpha)}{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}$$

• траектория мухи: $(AD+DA_1)\dfrac{1}{1-k} =$

$$= \frac{5\sin 60\cdot 2\sin 60\cos(15^\circ-\alpha)}{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}\,\frac{1}{1-k} \Rightarrow$$

(см на обороте)

№1 (продолжение) <u>3 страница</u>

$$\frac{1}{1-k}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{\sin 60^\circ \sin 45^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}\right)}=\frac{1}{1-1+\frac{\sin 60^\circ \sin 45^\circ}{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}}=$$

$$=\frac{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}{\sin 60^\circ \sin 45^\circ}$$

тогда траектория мухи:

$$\frac{5\sin 60^\circ\cdot 2\sin 60^\circ\cos(15-\alpha)^\circ}{\cancel{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45+\alpha)}}\cdot\frac{\cancel{\sin(120^\circ-\alpha)\sin(45+\alpha)}}{\sin(60^\circ)\sin(45^\circ)}=$$

$$=\frac{10\sin 60^\circ\cos(15-\alpha)}{\sin 45^\circ}.$$

если $\alpha=0^\circ$ (муха идет по маршруту $AB+BC$)

$$L_0=\frac{10\sin 60^\circ\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ}=AB+BC=5+5\frac{\sin 75}{\sin 45^\circ}=$$

$$=5\frac{\sin 45^\circ+\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=5\frac{\sin 60^\circ\cdot 2\sin 75}{\sin 45}=$$

$$=10\frac{\sin 60^\circ\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=10\frac{\frac{\sqrt3}{2}\sin 75}{\frac{\sqrt2}{2}}=10\frac{\sqrt3}{2}\sin 75^\circ>11{,}5$$

чтобы траектория была max, то

$\cos(15-\alpha)\to max \Rightarrow \cos 0^\circ=1 \quad \alpha_{max}=15^\circ$

$$L_{max}=10\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=10\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}}=10\frac{\sqrt3}{\sqrt2}$$

$10\frac{\sqrt3}{\sqrt2}$ сравним $\quad 100\frac{3}{2}=50\cdot3=150$

$\left(10\frac{\sqrt3}{2}\right)^2=150>144 \qquad 144=12^2$

$\left(10\frac{\sqrt3}{2}\right)^2>12^2$

$10\frac{\sqrt3}{\sqrt2}>12$

значит, может оказаться, что муха пролетит больше 12 метров

Ответ: может (Example: достигается при $\angle BAD=15^\circ$)

4 страница

№5 $\begin{cases} xy-2y=x+106 \ (1) \\ yz+3y=z+39 \ (2) \\ zx+3x=2z+438 \ (3) \end{cases}$

из (1) и (2): $\begin{cases} y(x-2)=x+106 \\ y(z+3)=z+39 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\dfrac{x+106}{x-2} \\ y=\dfrac{z+39}{z+3} \end{cases} \Rightarrow (x+106)(z+3)=(z+39)(x-2)$

$\cancel{xz}+3x+106z+106\cdot 3=$

$=\cancel{xz}+39x-2z-2\cdot 39$

$108z+106\cdot 3=36x-2\cdot 39 \quad |:3$

$36z+106=12x-2\cdot 13$

$36z+106+26=12x$

$36z+132=12x \quad |:3$

$12z+44=4x \quad |:4$

$\boxed{3z+11=x} \ (4)$

- подставим (4) в (3)

$z(3z+11)+3(3z+11)=2z+438$

$3z^2+11z+9z+33=2z+438$

$3z^2+18z+33=438 \quad |3$

$z^2+6z+11=146$

$z^2+6z-135=0$

$D=36+4\cdot 135=$
$=36+400+120+20=$
$=540+36=576=24^2$

$z=\dfrac{-6\pm 24}{2} \quad z=-3\pm 12$

$\boxed{\left[\begin{array}{l} z=-15 \\ z=9 \end{array}\right.} \ (6)$

ни на обороте

- подставим $z=-15$ ~~в (2) вар~~ $\longrightarrow$

в (2):

$-15y+3y=-15+39$

$-12y=24 \quad \boxed{y=-2}$

~~ни на обороте~~

подставим $z=9$ в (2):

$9y+3y=39+9 \quad 12y=48 \quad \boxed{y=4}$

№5 (продолжение)

5 страница

• подставим $y = -2$ в (1):

$$-2 \cdot x + 4 = x + 106$$

$$-3x = 102$$

$$\boxed{x = -34}$$

подставим $y = 4$ в (1)

$$4x - 8 = x + 106$$

$$3x = 114$$

$$\boxed{x = 38}$$

Таким образом, решением системы уравнений является:

$(38; 4; 9)$ и $(-34; -2; -15)$

Ответ: $(38; 4; 9)$, $(-34; -2; -15)$

Проверка: 1)
$$\begin{cases} \overset{36\cdot 4}{38\cdot 4 - 2\cdot 4} = \overset{144}{38+106} & 144=144 \\ \overset{4\cdot 12}{4\cdot 9 + 3\cdot 4} = \overset{48}{9+39} & 48=48 \\ \underset{38\cdot 12}{9\cdot 38 + 3\cdot 38} = \underset{456}{2\cdot \overset{18}{9} + 438} & 456=456 \end{cases}$$

верно!

2)
$$\begin{cases} \overset{34\cdot 2}{-34\cdot(-2)} + \overset{36\cdot 2}{2\cdot 2} = \overset{72}{-34+106} & 72=72 \\ \overset{30}{-2(-15)} \overset{-6}{-2\cdot 3} = -15+39 & 24=24 \\ \overset{15\cdot 34}{-15\cdot(-34)} \underset{12\cdot 34}{-34\cdot 3} = \overset{408}{-15\underset{-30}{\cdot} 2 + 438} & 408=408 \end{cases}$$

верно

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 12 \\ \hline 68 \\ 34 \\ \hline 408 \end{array}$$

6 страница

№3 Пусть m – число подарков, которые получили дети

тогда из условия mN – общее кол-во подарков

Пусть x_i – кол-во подаренных подарков i-ого ребенка

ранжируем этих детей по числу подаренных подарков, то есть

$$x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_N$$

из условия $x_1 = 0$ (т.к. кто-то ничего не дарил) $x_2 = 1$, $x_k = k-1$ (в силу того, что все дарили разное кол-во подарков)

$$x_N = N-1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots x_N = \underbrace{0+1+2+\ldots+N-1}_{\text{арифм. прогр}} =$$

$$= \frac{0+N-1}{2} N = \frac{(N-1)N}{2}$$

с другой стороны

$$N \cdot m = \frac{(N-1)N}{2}$$

$$2Nm = (N-1)N$$

$$2m = N-1$$

$$N = 2m+1$$

это значит, что N – нечетное число

Таким образом, это возможно при нечетных N

Ответ: при нечетных $N>1$

~~№2 из условия~~ ~~1)~~ $\cancel{x_1 = x_1}$

$\cancel{\overline{x_2} = \frac{x_1+x_2}{2}}$ $\cancel{2\overline{x_2} = x_1 + x_2}$

$\cancel{\overline{x_1} < \overline{x_2}}$ $\cancel{\overline{x_1} + \overline{x_2} < 2\overline{x_2}}$

$\cancel{\overline{x_1} + \overline{x_1} < x_1 + x_2}$

$\cancel{x_1 + x_1 < x_1 + x_2}$

$\cancel{x_1 < x_2}$

см. продолжение на обороте →

~~№2 (продолжение) $\overline{x_3} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$~~

~~2) $3\overline{x_3} = x_1 + x_2 + x_3$~~

$\boxed{№2}$ 1) $\overline{x_1} = x_1$ $\quad 2\overline{x_2} = x_1 + x_2$

$$\overline{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

из условия $\overline{x_2} < x_2$ $\quad x_2 - \overline{x_2} > 0$

$$\overline{x_2} + \overline{x_2} = x_1 + x_2$$

$$x_2 - \overline{x_2} = \overline{x_2} - x_1$$

рассмотрим (1–6)

(1) $2\overline{x_2} < 2x_2$, $2x_2 = x_1 + x_2$ $\quad x_1 + x_2 < 2x_2$

$x_1 < x_2$

$\overline{x_1} = x_1$

$$\boxed{\overline{x_1} < x_2}$$

$$2\overline{x_2} = x_1 + x_2$$

$$2\overline{x_2} = \overline{x_1} + x_2$$ (заменим на меньшее) $\quad x_2 > \overline{x_1}$

$$\overline{x_1} + \overline{x_1} < 2\overline{x_2}$$

$$\boxed{\overline{x_1} < \overline{x_2}}$$

(2) $\overline{x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $\quad \overline{x_3} < x_3$

$3\overline{x_3} = x_1 + x_2 + x_3 < 3x_3$ (из условия)

$$x_1 + x_2 + x_3 < 3x_3$$

$$x_1 + x_2 < 2x_3$$

(см. на след. листе)

$$x_1 + x_2 = 2\overline{x_2}$$

$$2\overline{x_2} < 2x_3$$

$$\boxed{\overline{x_2} < x_3}$$ подставим

~~$3\overline{x_3} < 3x_3$~~

$$3\overline{x_3} = x_1 + x_2 + x_3 = 2\overline{x_2} + x_3 \Rightarrow 3\overline{x_3} > 3\overline{x_2}$$

$\overline{x_3} > \overline{x_2}$

(3) $\overline{x_4} = \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} < x_4$ №2 (продолжени) 8 страницу

• $x_1+x_2+x_3 < 4x_4 - x_4$

$\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{3\overline{x_3}} < 3x_4 \Rightarrow \boxed{\overline{x_3} < x_4}$

• $4\overline{x_4} = \underbrace{x_1+x_2+x_3}_{3\overline{x_3}} + x_4$

$4\overline{x_4} = 3\overline{x_3} + x_4$

$x_4 > \overline{x_3}$

$4\overline{x_4} > 3\overline{x_3} + \overline{x_3} \Rightarrow \boxed{\overline{x_4} > \overline{x_3}}$

(4) $\overline{x_5} = \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} < x_5$

• $x_1+x_2+x_3+x_4 < 5x_5 - x_5$

$\underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4}_{4\overline{x_4}} < 4x_5$

$4\overline{x_4} < 4x_5$ $\boxed{\overline{x_4} < x_5}$

• $5\overline{x_5} = \underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4}_{4\overline{x_4}} + x_5$, $x_5 > \overline{x_4}$

$5\overline{x_5} > 4\overline{x_4} + \overline{x_4}$

$\boxed{\overline{x_5} > \overline{x_4}}$

(5) $\overline{x_6} = \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6} < x_6$

• $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 < 6x_6$

$\underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}_{5\overline{x_5}} < 5x_6$

$5\overline{x_5} < 5x_6$ $\boxed{\overline{x_5} < x_6}$

• $6\overline{x_6} = \underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}_{5\overline{x_5}} + x_6$, $x_6 > \overline{x_5}$

$6\overline{x_6} > 5\overline{x_5} + \overline{x_5}$ $\boxed{\overline{x_6} > \overline{x_5}}$

(см продолжение на обороте)

№2 продолжение

9 страницу

таким образом $\overline{x_1}<\overline{x_2}<\overline{x_3}<\overline{x_4}<\overline{x_5}<\overline{x_6}$

рассмотрим вторую часть года (с 7 до 12)

(6) $\overline{x_7}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7}{7}>x_7$

- $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6>7x_7-x_7$

$\underbrace{x_1+x_2+\dots x_6}_{6\overline{x_6}}>6x_7 \Rightarrow 6\overline{x_6}>6\overline{x_7}$

$\boxed{\overline{x_6}>\overline{x_7}}$

- $7\overline{x_7}=\underbrace{x_1+\dots x_6}_{6\overline{x_6}}+x_7$

$7\overline{x_7}=6\overline{x_6}+x_7$ $\quad x_7<\overline{x_6}$

$7\overline{x_7}<6\overline{x_6}+\overline{x_6}$ $\quad \boxed{\overline{x_7}<\overline{x_6}}$

(7) $\overline{x_8}=\frac{x_1+\dots x_7+x_8}{8}<x_8$

- $x_1+\dots x_7+x_8<8x_8$

$\underbrace{x_1+\dots x_7}_{7\overline{x_7}}<7x_8 \Rightarrow 7\overline{x_7}<x_8$

$\boxed{\overline{x_7}<x_8}$

- $8\overline{x_8}=\underbrace{x_1+\dots x_7}_{7\overline{x_7}}+x_8$ $\quad 8\overline{x_8}=7\overline{x_7}+x_8$

$x_8>\overline{x_7}$

$8\overline{x_8}<7\overline{x_7}+\overline{x_7}$

$\boxed{\overline{x_8}<\overline{x_7}}$

Ответ: x_6 (в шестом месяце)

(8) $\overline{x_9}=\frac{x_1\dots x_8+x_9}{9}>x_9$

- $x_1+\dots x_8+x_9>9x_9$

$\underbrace{x_1\dots x_8}_{8\overline{x_8}}>8x_9 \Rightarrow \overline{x_8}>x_9$

- $9\overline{x_9}=\underbrace{x_1+x_2\dots x_8}_{8\overline{x_8}}+\underbrace{x_9}_{x_9<\overline{x_8}} \Rightarrow 9\overline{x_8}>9\overline{x_9}$

$\overline{x_8}>\overline{x_9}$

по аналогии выстроятся пункты 9, 10, 11

(9) $\overline{x_{10}}=\frac{x_1\dots x_9+x_{10}}{10}$ $\quad \overline{x_{10}}<\overline{x_9}$

в итоге получится: $\overline{x_1}<\overline{x_2}<\overline{x_3}<\overline{x_4}<\overline{x_5}<\overline{x_6}$

$\overline{x_6}>\overline{x_7}>\overline{x_8}>\overline{x_9}>\overline{x_{10}}>\overline{x_{11}}>\overline{x_{12}}$, т.е. в шестом месяце max производ.

№5 $\begin{cases} xy-2y=x+106 \\ yz+3y=z+39 \\ zx+3x=2z+438 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x-2)=x+106 \\ y(z+3)=z+39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{x+106}{x-2} \\ y=\frac{z+39}{z+3} \end{cases}$

$\frac{x+106}{x-2}=\frac{z+39}{z+39}$

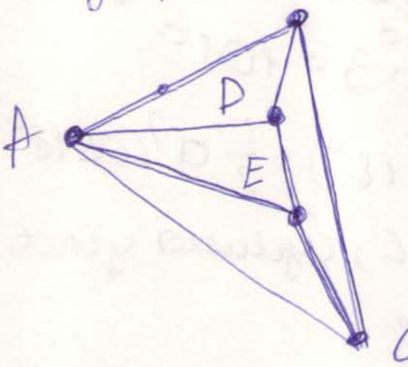
$(x+106)(z+39)=(x-2)(z+3)$

$xz+39x+106z$

10 страница

(огр. ломаной из этих 5 точек)

№4 I случай: фигура, ограниченная пятью точками, является невыпуклым многоугольником, при этом две точки находятся внутри:



Если $S_{ADE} \geq 2$, $S_{ABD} \geq 2$, а $S_{ABE}=S_{ADE}+S_{ABD}+S_{BDE}$

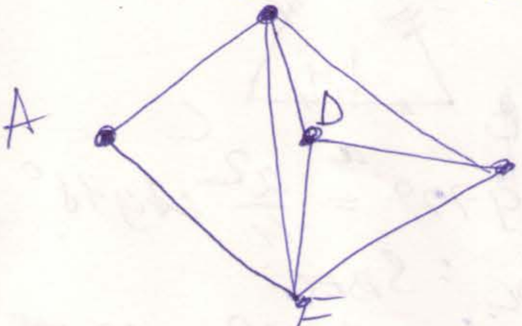
тогда $S_{ABE} > S_{ADE}+S_{ABD}$

то есть $S_{ABE} > 2+2$

$S_{ABE} > 4$

таким образом, нашлись 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3

II случай: фигура, ограниченная пятью точками, является невыпуклым многоугольником, при этом одна точка находится внутри



Если $S_{BDC} \geq 2$, $S_{DCE} \geq 2$, а $S_{BEC}=S_{BDC}+S_{BDE}+S_{DCE}$,

тогда $S_{BEC} > S_{BDC}+S_{DCE}$

$S_{BEC} > 2+2$

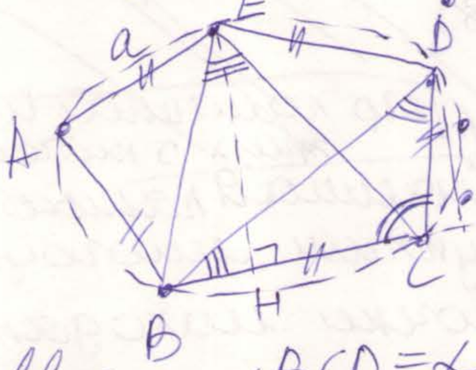
$S_{BEC} > 4$

также нашлись 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3

см на обороте

№4 (продолжение)

III случай: фигура, образованная ломаной, соед. эти 5 точек, является выпуклым пятиугольником



• рассмотрим правильный 5ти угольник

• пусть $AB=BC=DC=ED=AE=a$

• наименьшей площадью обладает $\triangle BDC$ (см. рисунок)

• введем $\angle BCD=\alpha$, $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot \sin\angle BCD$

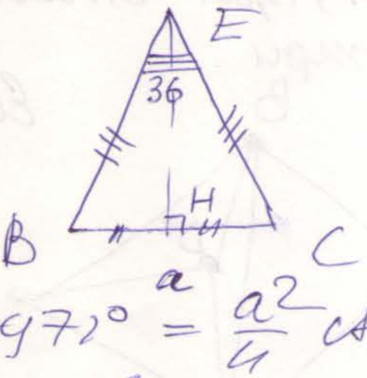
$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, при этом угол пятиугольника равен: $\alpha=\frac{180^\circ(5-2)}{5}=\frac{180^\circ\cdot 3}{5}=36^\circ\cdot 3=108^\circ$

$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}a^2\sin 108^\circ=\frac{1}{2}a^2\sin(90^\circ+18^\circ)=\frac{1}{2}a^2\cos 18^\circ$

• $\angle CBD=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$ (из $\triangle BDC$, сумма углов в $\triangle$-нике, $BC=CD \Rightarrow \angle CBD=\angle CDB$)

• около правильной фигуры можно описать окр. $\Rightarrow \angle BEC=\angle BDC$ (т.к. являются вписанными и опираются на одну дугу, по свойству впис. углов)

• наибольшей площадью обладает $\triangle BEC$



$S_{BEC}=\frac{1}{2}BC\cdot EH$

$\angle EBC=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ$

$\frac{EH}{BH}=tg\angle EBC \Rightarrow EH=tg72^\circ\,\frac{a}{2}$

$S_{BEC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot tg72^\circ\,\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}tg72^\circ=\frac{a^2}{4}ctg18^\circ$

• найдем отношение $S_{BDC}:S_{BEC}$

$\cancel{S_{max}}=\frac{S_{BDC}}{S_{BEC}}=\frac{\frac{1}{2}a^2\cos 18^\circ}{\frac{1}{4}a^2 ctg18^\circ} \Rightarrow \frac{S_{BEC}\,(S_{max})}{S_{BDC}\,(S_{min})}=\frac{ctg18^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{\cos 18^\circ}{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}=$

$=\frac{1}{2\sin 18^\circ}$ попробуем оценить $\sin 18^\circ$ (см. на след. →)

$\frac{30^\circ}{2}<18^\circ<\frac{60^\circ}{2}$ $\quad \sin\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$

$\frac{30}{2}<18^\circ<\frac{45}{2}$

$\cancel{\sin\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}}$

№4 продолжение 12 страницу

сравним $\frac{1}{2\sin 18^\circ}$ и $\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3}$ и $2\sin 18^\circ$

$\frac{1}{3}$ и $\sin 18^\circ$

$\frac{1}{9}$ и $\sin^2 18^\circ$

$\frac{2}{9}$ и $2\sin^2 18^\circ$ (заменим на меньшее)

$\frac{2}{9}$ и $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{7}{9}$

$9\sqrt{3}$ и $2\cdot 7$

$81\cdot 3$ и 14^2

243 и 196

$243 > 196 \Rightarrow \frac{1}{2\sin 18^\circ} > \frac{3}{2}$, а

$\sin 18 > \sin 15^\circ$

$\sin 18^\circ > \sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}$

$2\sin^2 18^\circ > 1-\cos 30$

$2\sin^2 18 > 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

это значит, что $\frac{S_{max}}{S_{min}} = \frac{1}{2\sin 18^\circ} > \frac{3}{2}$,

т.е. если $S_{min} \geq 2$, то $S_{max} > 3$

$\frac{S_{max}}{S_{min}} > \frac{3}{2}$ $\begin{cases} 2S_{max} > 3S_{min} \\ S_{min} > 2 \end{cases}$

$2\cdot S_{max} > 3\cdot 2$

$\boxed{S_{max} > 3}$

то есть, найдутся три точки, которые образуют треугольник с площадью не меньше 3, и получится так, что все возможные Δ-ки и с 3 вершинами ~~из~~ из 5 будут иметь площадь не менее 2