№5.

$$\begin{cases} xy-2y=x+106 \\ yz+3y=z+39 \\ z\cdot x+3x=2z+438 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y(x-2)=x+106 \\ y(z+3)=z+39 \\ z(x-2)=438-3x \end{cases} \quad (*)$$

Поскольку $x\neq 2$ (иначе $x+106=0 \Rightarrow x=-106$ — противоречие), то

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\frac{x+106}{x-2} \\ y(z+3)=z+39 \\ z=\frac{438-3x}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+106}{x-2}\cdot\left(\frac{438-3x}{x-2}+3\right)=$$

$$=\frac{438-3x}{x-2}+39 \Longleftrightarrow \frac{432\cdot(x+106)}{(x-2)^2}=\frac{36(x+10)}{x-2} \Longleftrightarrow (x\neq 2)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{12(x+106)}{x-2}=x+10 \Longleftrightarrow x^2+8x-20=12x+1272 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2-4x-1292=0 \Longleftrightarrow (x+34)(x-38)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-34 \Rightarrow y=\frac{106-34}{-34-2}=-2 \text{ и } z=\frac{438+3\cdot 34}{-34-2}=-15 \\ x=38 \Rightarrow y=\frac{38+106}{38-2}=4 \text{ и } z=\frac{438-38\cdot 3}{38-2}=9. \end{array}\right.$$

Подстановкой убеждаемся, что найденные значения удовлетворяют системе (*).

Ответ: $(-34;-2;-15)$; $(38;4;9)$.

№1

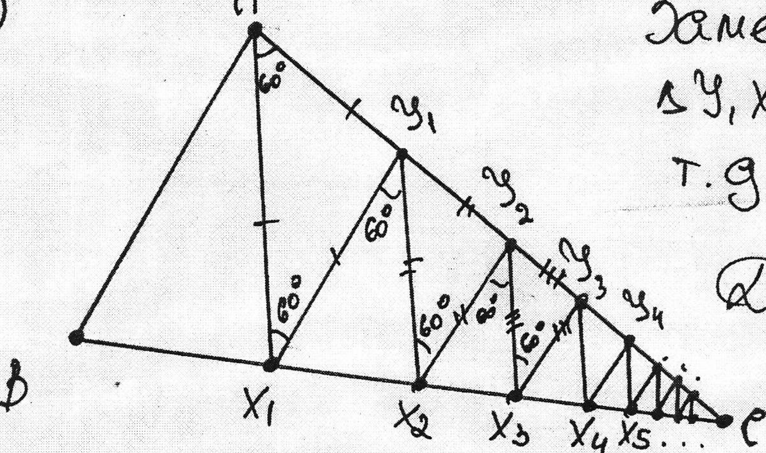
Ответ: может.

Пример: пусть муха вылетела под углом в 60° к AC.

1) По теореме синусов в $\triangle ABC$: $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin 45^\circ}$;

$AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 5 = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2)



Заметим, что $\triangle AX_1Y_1$, $\triangle Y_1X_2Y_2$, $\triangle Y_2X_3Y_3$, $\triangle Y_3X_4Y_4$ и т.д. — равносторонние

$\Downarrow$

Длина пути мухи равна $2AC > 12$

($2 \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} > 12 \Leftrightarrow \frac{300}{2} > 144 \Leftrightarrow 150 > 144$, что, очевидно, верно), quod erat demonstrandum.

№2.

1. Пусть $y_k = \overline{X_k} - \overline{X_{k-1}}$, где $k \in \{2, 3, \ldots, 12\}$. Тогда

$$y_k = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{k-1} = \frac{k(x_1 + \ldots + x_{k-1}) + kx_k -}{k \cdot}$$

$$\frac{-(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) - k(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1})}{\cdot (k-1)} = \frac{kx_k - k \cdot \overline{x_k}}{k(k-1)} =$$

$$= \frac{x_k - \overline{x_k}}{k-1}.$$

2. Из условия: $y_k > 0$, $k \in \{2, 3, \ldots, 6\}$ и $y_k < 0$ при $k \in \{7, 8, \ldots, 12\} \Rightarrow$ последовательность $\overline{x_1}, \overline{x_2}$,

$\overline{X_3}, \dots, \overline{X_{12}}$ возрастала до $\overline{X_6}$ и с $\overline{X_6}$ начала убывать $\Rightarrow$ $\overline{X_6}$ - наибольшее среднее производство товара.

Ответ: в ~~июле~~ июне.

№3.

1. Введём граф, вершины которого - дети, и отрезками соединим тех детей, которые дарили друг другу подарки, причём количество отрезков между двумя вершинами равно общему числу подарков, которые дарили друг другу эти дети.

2. Заметим, что степень любой вершины в нашем графе $\leq N-1$, поскольку иначе ребёнок со степенью $\geq N$ подарил кому-то по принципу Дирихле $\geq \frac{N}{N-1}$ подарков, то есть ≥ 2 — противоречие.

3. Так как среди целых неотрицательных чисел от 0 до $N-1$ ровно N чисел, то степени вершин равны $0, 1, 2, \dots, N-1$.

4. Как известно, сумма степеней вершин равна удвоенному числу рёбер графа, то есть в нашем случае удвоенное количество всех подарков: $0+1+\dots+N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$ и, из условия, каждый ребёнок получил $\frac{N-1}{2}$ подарков $\Rightarrow$

$\Rightarrow N$ - нечётное.

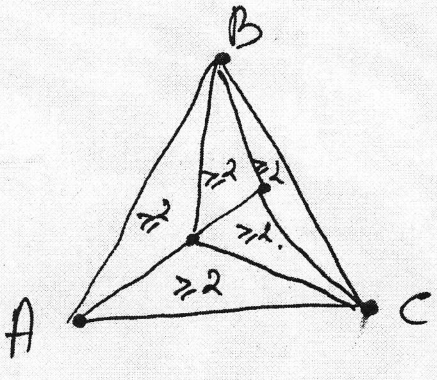
5. Пример возможного дарения подарков: назовём ребёнка k-ым, если он подарил k подарков.

Сделаем $\frac{N-1}{2}$ пар, в каждой из которой

k-ый и $(N-k)$-ый ребёнок $(k \in \{1, 2, \ldots, N-1\})$.
При этом 0-ой ребёнок не попал ни в одну пару.
Пусть в каждой паре k-ый ребёнок дарит подарки $1, 2, \ldots, (k-1)$-му детям и $(N-k)$-му, а $(N-k)$-ый дарит k-му ребёнку и всем тем, кому не подарил подарков k-ый. (при $k \geq 2$)
Первый ребёнок дарит подарок $(N-1)$-му, а $(N-1)$-ый дарит подарки всем, кроме себя.
Таким образом, каждый ребёнок получил $\frac{N-1}{2}$ подарков (поскольку пар $\frac{N-1}{2}$) и в таком примере, очевидно, каждый подарил другому не более одного подарка.
Ответ: при любых нечётных числах, кроме 1.

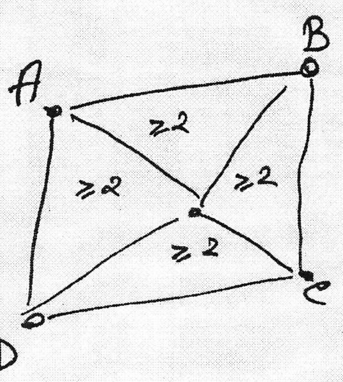
N4.

Всего возможно, очевидно, 3 случая взаимного расположения пяти точек на плоскости:
I. Три точки образуют треугольник и две другие точки лежат в этом треугольнике.

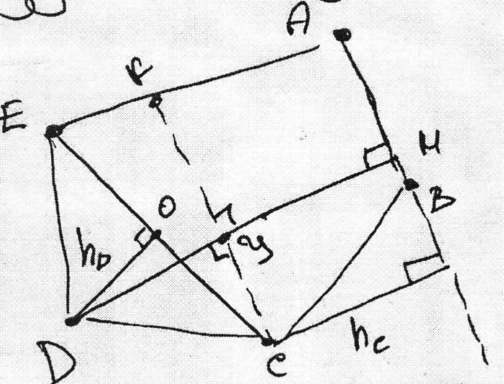


Тогда $\triangle ABC$ имеет площадь $\geq 10 \Rightarrow$ точки A, B и C образовали треугольник площади больше 3.
II. Четыре точки образуют выпуклый четырёхугольник и одна точка лежит внутри его.
Тогда площадь $ABCD \geq 8$, и так как

$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$, то площадь по принципу Дирихле хотя бы одного из $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ не менее $\frac{8}{2} = 4$, quod erat demonstrandum.



III. Все пять точек образуют выпуклый пятиугольник.



Пусть $AB = x$.

Докажем утверждение задачи методом от противного.

Не умаляя общности, будем считать, что высота, опущенная из т. C на AB (h_C), не больше высоты, опущенной из т. E на AB.

Из предположения: $DM \cdot x < 6$ $(S_{\triangle DAB} < 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow DM < \frac{6}{x}$.

$h_C \cdot x \geq 2$ $(S_{\triangle ABC} \geq 2) \Leftrightarrow h_C \geq \frac{2}{x}$ $\Rightarrow DY < \frac{6}{x} - \frac{2}{x} = \frac{4}{x}$.

Четырёхугольник DOYC — описанный и т.к. $\cup DOY \geq \cup DO$ (маленькой) $\Rightarrow h_D \leq DY \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h_D < \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{h_D} > \frac{x}{4}$.

$h_D \cdot EC \geq 4$ $(S_{\triangle DEC} \geq 2) \Leftrightarrow EC \geq \frac{4}{h_D} > 4 \cdot \frac{x}{4} = x$

и никакого противоречия...