№ 5

$$\begin{cases} xy-2y=x+106, \\ yz+3y=z+39, \\ zx+3x=2z+458; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1)=108, \\ (z+3)(y-1)=36, \\ (z+3)(x-2)=432. \end{cases} \quad (*)$$

$x\neq 2;\ y\neq 1,\ z\neq -3.$

Перемножив все равенства, получим:

$(x-2)(y-1)(z+3)=\pm 108\cdot 2\cdot 6$

1) $(x-2)(y-1)(z+3)=108\cdot 2\cdot 6$

и поделим сразу на 3 равенства системы (*), получим:

$$\begin{cases} (z+3)=12, \\ (x-2)=36, \\ (y-1)=3; \end{cases} \quad \begin{cases} z=9, \\ x=38 \\ y=4. \end{cases}$$

Проверка. $\begin{cases} 38\cdot 4-4\cdot 2=38+106, \\ 4\cdot 9+3\cdot 4=9+39, \\ 9\cdot 38+3\cdot 38=2\cdot 9+458. \end{cases}$ – верно.

2) $(x-2)(y-1)(z+3)=-108\cdot 2\cdot 6.$

$$\begin{cases} z+3=-12, \\ x-2=-36, \\ y-1=-3.; \end{cases} \quad \begin{cases} z=-15, \\ x=-34, \\ y=-2. \end{cases}$$

Проверка. $\begin{cases} 34\cdot 2+2\cdot 2=-34+106, \\ 2\cdot 15-2\cdot 3=-15+39, \\ 15\cdot 34-3\cdot 34=-2\cdot 15+458. \end{cases}$ – верно.

Ответ: $\{(38;4;9);(-34;-2;-15)\}$.

№2.

Из условия:
$$\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} < x_2, \\ \vdots \\ \frac{x_1+\ldots+x_6}{6} < x_6, \\ \frac{x_1+\ldots+x_7}{7} > x_7, \\ \vdots \\ \frac{x_1+\ldots+x_{12}}{12} > x_{12}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \vdots \\ x_1+\ldots+x_5 < 5x_6 \\ x_1+\ldots+x_6 > 6x_7 \\ \vdots \\ x_1+\ldots+x_{11} > 11x_{11} \end{cases}$$

1) Рассмотрим $\bar{x}_{i+1}-\bar{x}_i$, где $i \in \mathbb{Z}$, $i \in [1,5]$.

$$\frac{x_1+\ldots+x_{i+1}}{i+1} - \frac{x_1+\ldots+x_i}{i} = \cancel{(i+1)x_i}\ \frac{i(x_{i+1})-(x_1+\ldots+x_i)}{i(i+1)} > 0,$$

т.к. $ix_{i+1} > x_1+\ldots+x_i$, т.к. $x_{i+1}(i+1) > x_1+\ldots+x_{i+1}$,

т.к. $x_{i+1} > \frac{x_1+\ldots+x_{i+1}}{i+1}$, где $i \in [1;5]$.

2) Рассмотрим $\bar{x}_i-\bar{x}_{i+1}$, где $i \in \mathbb{Z}$, $i \in [6,11]$

$$\frac{x_1+\ldots+x_i}{i} - \frac{x_1+\ldots+x_{i+1}}{i+1} = \frac{x_1+\ldots+x_i - ix_{i+1}}{i(i+1)} > 0,$$ т.к.

$x_1+\ldots+x_i > ix_{i+1}$, т.к. $\frac{x_1+\ldots+x_{i+1}}{i+1} > x_{i+1}$, где $i \in [6,11]$

Из 1) ш. $\Rightarrow$ $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 \ldots < \bar{x}_6$

Из 2) ш. $\Rightarrow$ $\bar{x}_{12} < \bar{x}_{11} < \ldots < \bar{x}_6$

значит $\bar{x}_1$ - наибольшее

Ответ: в 6 месяце - в июне.

№3

n-детей.

Т.к. один ребёнок другому дарил не больше 1 подарка, а всего детей n, то каждый дарил ~~...~~ целое число подарков из промежутка $[0; n-1]$, в этом промежутке ровно n целых чисел, а значит это и есть число подарков разных детей.

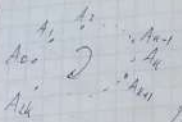
$0+\dots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$

Т.к. все n получили поровну, то каждый получил $\frac{n-1}{2}$ подарков. Значит, чтобы $\frac{n-1}{2}$ - было целым, необходимо, чтобы n было нечётным и >1, по условию.

~~Ответ: n - нечётное число, большее 1.~~

Доказательство возможности разбиения для любого нечётного n, $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$.

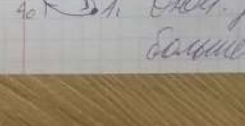
Пусть A_i - ребёнок, к. подарил i подарков $i\in[0, n-1]$, $i\in\mathbb{Z}$, тогда



Когда расставим их по кругу, кажд. должен получить k подарков. Пусть каждый раздаёт все свои подарки по одному следующему по часовой стрелке. Т.е. A_k даёт всем подарки, A_0 – никому; $A_1 \Rightarrow A_2$; $A_2 \Rightarrow A_3$ и A_4 и т.д.

Т.к. каждый отдаст свои подарки, должно, что все получат ровно

A_0 получит k подарков: от A_{k+1} до A_n – кажд. подарит по 1, A_k "пропускает" ... тогда ... A_0, тогда

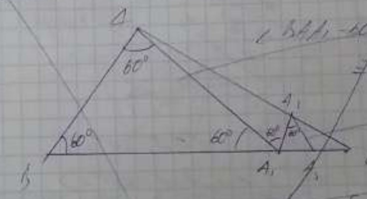


Теперь кажд. передаст по 1 подарку от A_1 до A_k и получится ситуация для $n = 2k-1$, т.е. по индукции это возможно для всех нечёт. n, т.к. возможно для 3.

Ответ: для любого нечётного n, большего 1.

№1

~~$\angle BAC = 75° = 60° + 15°$~~



~~$\angle BAA_1 = 60° \Rightarrow \angle BA_1A = 60° \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \angle A_2A_1A_3 = 60° \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \angle A_1A_2A_3 = 60°$ и т.д.~~

~~получ. путь~~

~~Путь будет~~

~~$AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 = 2BC - AB$, т.к.~~

~~Δ-ки треугольники правильные, ... стороны равны~~

~~$AB = 5$, $BC = ?$~~

~~$\frac{BC}{\sin 75°}$ $\frac{AC}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 45°}$ – т. син-усов~~

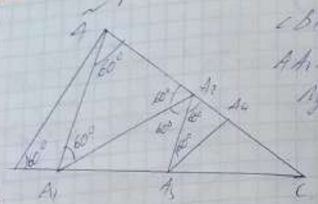
~~$AC = \frac{AB \sin 60°}{\sin 45°} = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$~~

~~т. cos-сов $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 BC \cdot AB \cos 60°$;~~

~~$\frac{75}{2} = BC^2 + 25 - 5BC \Rightarrow BC = \frac{5(1+\sqrt{3})}{2}$~~

~~$2BC - AB = 5\sqrt{3}$~~

№ 1



$\angle BAC = 75° = 15° + 60°$

$AA_1A_2A_3$ — путь мухи

$\angle A_2AA_1 = 60°$, $\angle AA_1A_2 = 60° \Rightarrow$

$\angle A_1A_2A = 60°$, $\angle A_1A_2A_3 = 60° \Rightarrow$

$\angle A_1A_3A_2 = 60°$; $\angle A_2A_3A_4 = 60° \Rightarrow$ и т.д.

получ. равностор. треугольники.

$(AA_1 + A_1A_2) + (A_2A_3 + A_3A_4) + \dots = 2(AA_1 + A_2A_3 + \dots) =$

$= 2AC$

Т. син-ов $\frac{AC}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 45°} \Rightarrow AC = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$

$2AC = 10\sqrt{\frac{3}{2}}$

$10\sqrt{\frac{3}{2}} \vee 12$,

$150 > 144$, значит $2AC > 12$,

след. расстояние которое муха пролетит больше 12 метров

Ответ: да, может.

№ 4.

Полученные 5 точек образуют пятиуг.

1) если он не выпуклый

тогда E лежит либо внутри $\triangle BCD$, либо $\triangle ABD$ внутри $\triangle BCD$, тогда $S_{BCD} > 4$, т.к. $S_{BCD} > S_{BCE} + S_{CED}$

2) если он выпуклый.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~