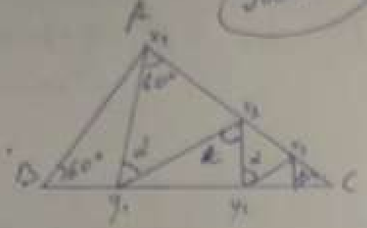
№1 (Лист 1) М 3/3(3)



Дано:
$\angle = 60°$
$\angle B = 60°$
$\angle C = 45°$
$AB = 5$
$x_1y_1 + y_1x_2 + ... + x_ny_n \ ... 12$

Решение:
пусть муха касается стороны AC в точках $x_1, x_2 \dots x_n$, а стороны BC в точках y_1, y_2, y_n

1) По Т синусов для $\triangle ABC$

$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin \angle C}{AB}$; $\frac{\sin 60°}{AC} = \frac{\sin 45°}{5}$, откуда $AC = \frac{5 \cdot \sin 60°}{\sin 45°} =$

$\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

2) по Т о сумме углов $\triangle$ $\angle A = 180° - \angle C - \angle B = 75°$

~~пусть $\angle y_1x_1x_2 = 60° = \alpha$~~

3) $x_1y_1x_2 = \angle y_1x_2y_2$, => $x_1y_1 \parallel x_2y_2$, по признаку о (нак/л) углах, аналогично доказать, что $x_2y_2 \parallel x_3y_3 \parallel x_4y_4$

~~4) пусть $\angle y_1x_1x_2 = 60°$, тогда $\angle y_2x_2x_3 = \angle y_3x_3x_4 \dots 60°$, т.к. прямые $\parallel$, =>~~ ~~$\angle x_1x_2y_1 = 60°$, т.к. смежный~~ $\angle y_1x_2y_2$ и $\angle y_1x_2x_3$, т.е. $\angle x_1x_2y_1 = 180° - 60° - 60°$
~~аналогично~~ $\angle$

4) $\angle y_1x_1x_2 = \angle y_2x_2x_3 \dots \angle y_{n-1}x_{n-1}x_n$, т.к. соотв углы при парал. прямых, => $\angle y_1x_2x_1 = \angle y_2x_3x_2 \dots y_{n-1}x_nx_{n-1}$, как смежные с $\angle\alpha$ и $\angle 60°$, т.е. $180° - 60° - 60°$

5) $\angle x_1y_1x_2 = \angle y_1x_1x_2 = \angle y_1x_2x_1$, => $\triangle x_1y_1x_2$ – равност. по признаку
аналогично для $\triangle x_2y_2x_3$, $x_3y_3x_4$, $x_4y_4x_5 \dots x_{n-1}y_{n-1}x_n$

6) путь мухи $x_1y_1 + y_1x_2 \dots + y_{n-1}x_n$

7) $AC = x_1x_2 + x_2x_3 \dots + x_{n-1}x_n$

8) т.к. $\triangle$ р/с $x_1y_1 = y_1x_2 = x_1x_2$, => $x_1y_1 + y_1x_2 = 2x_1x_2$, аналогично для всех р/с $\triangle$

9) путь мухи $= 2(x_1x_2 + x_2x_3 \dots + x_{n-1}x_n) = 2AC$
$2AC = 5\sqrt{6}$ $(5\sqrt{6})^2 \vee (12)^2$ $25 \cdot 6 \vee 144$
$150 > 144$, => $5\sqrt{6} > 12$, => может оказаться

Ответ: да, может. Пример приведён. (7)

№2.

$\bar{x}_1 = x_1;\ \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$, и т. $\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \dots \bar{x}_{12} = \frac{1}{12}(x_1+x_2+\dots+x_{12})$

$\bar{x}_k < x_k$, при k от 2 до 6

$\bar{x}_k > x_k \quad 7 \le k \le 12$

$\bar{x}_{max} = ?$

$\bar{x}_2 = \frac{x_1+x_2}{2} \quad |\cdot 2$

$2\bar{x}_2 = x_1+x_2 \qquad x_2 > \bar{x}_2,\ \bar{x}_2 < x_2$

$x_2 = \bar{x}_2 + n$

$2\bar{x}_2 = x_1 + \bar{x}_2 + n$

$\bar{x}_2 = x_1 + n$, $\Rightarrow \bar{x}_2 > x_1$, а, т.к. $x_1 = \bar{x}_1$, то $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$

до 6 члена аналогично докажем, получим

$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < x_2 < \bar{x}_3 < x_3 < \bar{x}_4 < x_4 < \bar{x}_5 < x_5 < \bar{x}_6 < x_6$

рассмотрим месяцы с 7 по 12

$\bar{x}_7 > x_7 \qquad \bar{x}_7 = \frac{(x_1+x_2+x_3 \dots x_7)}{7} \quad |\cdot 7$

$7\bar{x}_7 = x_1+x_2 \dots + x_7$

$x_7 = \bar{x}_7 - n$

$7\bar{x}_7 = x_1+x_2 \dots + x_6 + \bar{x}_7 - n$

$6\bar{x}_7 = x_1+x_2 \dots + x_6$, а $x_6 > x_5 > x_4 > x_3 > x_2 > x_1$, $\Rightarrow$

$\bar{x}_7 < x_6$

аналогично получим $x_{12} < \bar{x}_{12} < x_{11} < \bar{x}_{11} < x_{10} < \bar{x}_{10} < x_9 < \bar{x}_9 < x_8 < \bar{x}_8 < x_7 \bar{x}_7$

Соответственно $\bar{x}_{max} = \bar{x}_6$ или $\bar{x}_7$, сравним эти две величины

$\bar{x}_6 = \frac{(x_1+\dots x_6)}{6} \qquad \bar{x}_7 = \frac{(x_1+\dots x_7)}{7} \qquad \bar{x}_6 \vee \bar{x}_7$

приведём к общ. знам (42)

$7(x_1+\dots+x_6) \vee 6(x_1 \dots + x_7)$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \vee 6x_7$

$x_6 > x_7 \qquad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 > 6x_7$, $\Rightarrow$

Ответ: Больший уровень производства $\bar{x}_{max}$ при x_6 будет в 6 месяце, июне.

7

№3 (Лист 2) М 313(3)

Дано:
n детей
$n>1$
всего x подарков,
тогда у каждого ребенка $\frac{x}{n}$ - подарков

Решение:
так как все дети подарили разное кол-во подарков, но никто не подарил одному ребенку два, => ребенок существует ребенок не подаривший ни одного подарка и не существует ребенка подарившего $>n$ подарков, т.к. в противном случае не выполнялось одно из условий.

Покажу на примере:
Допустим, у нас 5 детей, тогда max число подарков от одного ребенка 4, ведь себе он дарить не может, а, кроме него всего 4 ребенка.
Все дети дарят разное кол-во подарков, => раз детей 5 существ 5 различных цифр, характеризующих кол-во подарков, причем они $\in N$, что возможно лишь в случае: 0, 1, 2, 3, 4 - кол-во подарков от ребенка.
1 реб, вт. реб, 3 реб, 4 реб, 5 реб

Заметим, что $\frac{x}{n}$ -подарков у одного ребенка $\in N$, т.е. $\frac{x}{n}\in N$
Из доказанного выше кол-во подарков всего, т.е. $x=(n-1)+(n-2)+(n-n)$
т.к. в при $n>0$ сущ дети, и только по одному, кто принес от 0 до $n-1$ подарка

x-сумма подарков детей

тогда $\frac{x}{n}=\frac{(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots(n-n)}{n}\in N$

раскроем

$$\frac{x}{n}=\frac{n\cdot n-(1+2+3\dots+n)}{n}$$

$1+2+3\dots+n$ - арифм. прогрес.
S-сумма прогрессии
$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(1+n)\cdot n}{2}=\frac{n+n^2}{2}$

$$\frac{x}{n}=\frac{n^2-\frac{n+n^2}{2}}{n}=\frac{2n^2-n}{2n}=\frac{n(n-1)}{2n}=\frac{n-1}{2}\in N,$$ т.е. при

$\forall$(любом) нечётном n

Ответ: N(нечетов), т.е. $n=2k+1$, $k\in N$

3

№5.

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 & 1 \\ yz + 3y = z + 39 & 2 \\ zx + 3x = 2z + 438 & 3 \end{cases}$$

I. Из 3: $x(z+3) = 2z + 438$, $\Rightarrow x = \frac{2z+438}{z+3}$

II. Из 1: $y(x-2) = x + 106$, $\Rightarrow y = \frac{x+106}{x-2}$

III. подставим I во II, получим:

$$y = \frac{\frac{2z+438}{z+3} + 106}{\frac{2z+438}{z+3} - 2} \qquad y = \frac{(2z+438+106z+318)(z+3)}{(z+3)(2z+438-2z-6)}$$

$$y = \frac{108z+756}{432}; \quad y = \frac{\overset{1}{108}(z+7)}{\underset{4}{432}} = \frac{z+7}{4}$$

IV. подставим ~~...~~ III во 2 ур.,

$$\frac{z+7}{4} \cdot z + \frac{3(z+7)}{4} = z + 39 \quad | \text{ домножим обе части на } 4$$

$$z^2 + 7z + 21 + 3z = 4z + 156$$

$$z^2 + 6z - 135 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{36 + 540} = 24$$

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm 24}{2} = \left[\begin{matrix} -15 \\ 9 \end{matrix}\right.$$

пусть $z_1 = -15$, а $z_2 = 9$, тогда найдём соответственные x_2, y_2, x_1, y_1

$$y_1 = \frac{-15+7}{4} = -2; \quad x_1 = \frac{-30+438}{-12} = -34$$

$$y_2 = \frac{9+7}{4} = 4; \quad x_2 = \frac{18+438}{12} = 38$$

Ответ: подходят два решения: $\{-34, -2; -15\}$ и $\{38, 4; 9\}$ (x, y, z соотв.).

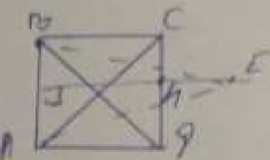
5

№4
$S_1 \geq 2$
$S_1 \geq 2$
$S_3 \geq 2$
:

Док-ть
сущ $S \geq 3$

(Лист 5) Решение: M 313(3)

возьмём 4 точки с наименьшей допустимой площадью образованных Δ - 2, получим квадрат



обозначим точки ABCD

$S_{ABC} = S_{BCD} = S_{ACD} = S_{BAD} = 2$

$BC = AB = AD = CD = 2$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

Теперь добавим пятую точку. по условию, что $S_n \geq 2$, точка не может лежать внутри кв-та, => она лежит вне кв, => найдётся Δ с основанием 2, но $h > 2$, => БФ сущ Δ $S_{которого} > 2$,
предположим, пятая точка E лежит за стороной CD, это не будет явл. частным случаем, т.к. фигура симметрична, и не имеет указания относительно какой стороны мы будем смотреть.
тогда $S_{ECD} \geq 2$, при $S_{min} = 2$ EH, где EH - высота ΔECD = 2, =>
EH_1, где $H_1 \in AB$ и EH_1 - высота ΔABE равна $2+2=4$, => $S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$

Ч.т.д. во всех случаях когда ABCD - не кв-т, S будет больше, => ч.т.д.

~~Ответ: б~~

2