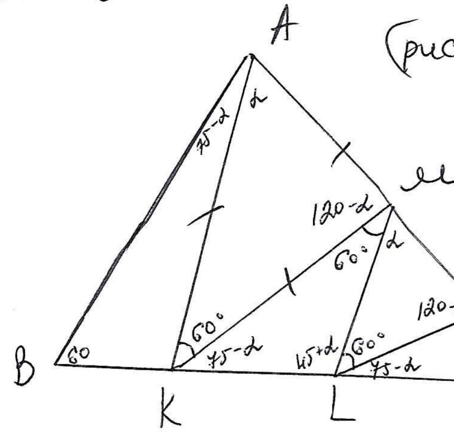
Задача 1



(рис. 1)

① Рассмотрим $\triangle ABC$

Расставим углы в данном треугольнике

Пусть $\angle KAM = \alpha$

Тогда

$\angle BAK = 75 - \alpha$

$\angle AKB = 45 + \alpha$

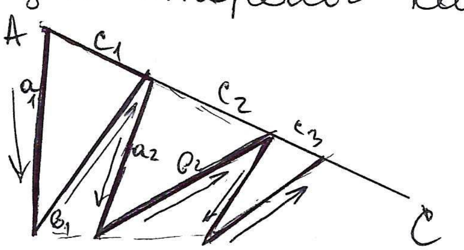
$\angle MKL = 75 - \alpha$

$\angle MLK = 45 + \alpha$

$\angle NLC = 75 - \alpha$

$\angle MNL = 120 - \alpha$

② Рас-м траекторию полета мухи, каждый раз она пролетает ~~какой~~ две стороны каких-то треугольников.



Тогда сумма всех третьих сторон будет составлять AC

$c_1 + c_2 + c_3 \ldots + c_n = AC$

Тогда если $AC \geq 12$, то и длина полета мухи будет больше 12.

③ Тогда докажем, что найдется такое AC, которое больше 12.

Рас-м $\triangle AKM$ (см. рис 1).

Чтобы AC - было наибольшим, тогда необходимо, чтобы каждая часть AC была наибольшей.

Тогда $AM \to max$.

~~Ч~~ Чтобы AM было наибольшим

необходимо, чтобы она лежала против большего угла

Следовательно,

$$\begin{cases} \alpha \le 60 \\ 120 - \alpha \le 60 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Тогда $\triangle AKM$ — равносторонний

$$AK = KM = AM$$

Так как $AK \parallel ML \ldots$, тогда $\triangle AKM \sim \triangle MLN$ будет бесконечное множество правильных треугольников

$\Downarrow$

сумма сторон, которые пролетает муха (две стороны каждого правильного треугольника) будет стремиться к AC и будет в 2 раза больше.

(4) Рас-м $\triangle ABC$ по теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$$

$$AC = \frac{\sin 60^\circ AB}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{2} \approx 6{,}1\ldots$$

(5) Тогда пусть L - длина полета, тогда длина будет (в какой-то момент времени)

$$L \le 2AC$$

$$L \le 2 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \qquad L \le 12{,}2\ldots$$

Тогда может быть такое, что муха пролетела больше 12, так как найдется такое время, когда будет 12.

Ответ: да, может

Задача 5

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 & (1) \\ yz + 3y = z + 39 & (2) \\ zx + 3x = 2z + 438 & (3) \end{cases}$$

Рас-м (1) уравнение

$xy - 2y = x + 106$

$xy - x = 2y + 106$

$x(y-1) = 2y + 106$ (а)

Рас-м (3) уравнение

$zx + 3x = 2z + 438$

$x(z+3) = 2z + 438$ (б)

Разделим уравнение (а) на (б)

$\frac{x(y-1)}{x(z+3} = \frac{2y+106}{2z+438}$ | : сократим дробь на x, т.к $x=0$ - не является решением системы,

$\frac{(y-1)}{(z+3)} = \frac{2y+106}{2z+438}$

$$(y-1)(2z+438)=(z+3)(2y+106)$$

$$2zy+438y-2z-438=2yz+106z+6y+3\cdot 106$$

$$438-2z-438-106z-6y-3\cdot 106=0$$

$$y=\frac{108z+756}{432} \quad (6)$$

Подставим (6) во (2) уравнение

(2): $yz+3y=z+39$

$$\left(\frac{108z+756}{432}\right)z+3\left(\frac{108z+756}{432}\right)=z+39$$

$$\left(\frac{108(z+7)}{432}\right)z+\frac{36(3z+21)}{144}=z+39$$

$$\left(\frac{z+7}{4}\right)z+\frac{3z+21}{4}=z+39$$

$$z^2+7z+3z+21-4z-156=0$$

$$z^2+6z-135=0$$

$$z=\frac{-6\pm\sqrt{576}}{2}$$

$$z_1=9$$

$$z_2=-15$$

Подставим $z_1=9$ в систему

$$y_1=\frac{108\cdot 9+756}{432}=4$$

$$x_1=\frac{2\cdot 4+106}{4-1}=38$$

Подставим $z_2=-15$ в систему

$$y_2=\frac{108\cdot(-15)+756}{432}=-2$$

$$x_2 = \frac{2\cdot(-2)+106}{-2-1} = -34$$

Ответ: решение системы $(x;y;z)$ будет $(-34; -2; -15)$; $(38; 4; 9)$

Задача 3

Все дарят разное количество подарков. Тогда, чтобы все получили одинаковое количество подарков, должно выполняться условие, что сумма всех подарков делилась нацело на количество детей.

Тогда кол-во подарков будет

$\underbrace{0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)}_{n}$ – арифметическая прогрессия

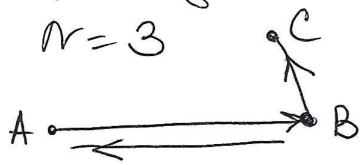
$$S_{подарков} = \frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n = \frac{0+n-1}{2}\cdot n = \frac{n-1}{2}\cdot n$$

Кол-во подарков будет $\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Чтобы $\frac{n-1}{2}$ было целым необходимо, чтобы $(n-1)$ делилось на 2. Тогда n – должно быть нечетным.

Приведем пример:

$n=3$



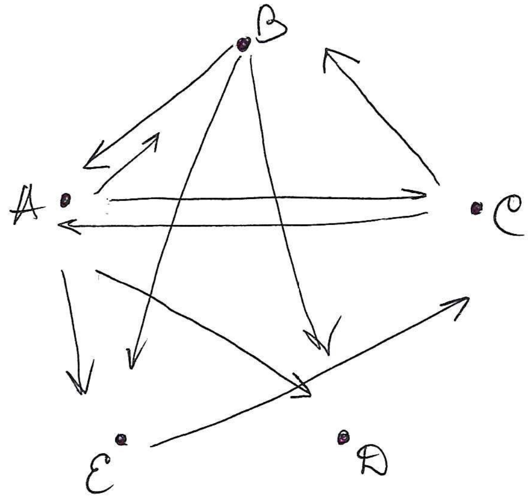
Все получили по 1 подарку

A подарил 1

B подарил 2

C подарил 0

Приведем пример для $n+2$
при $n=3$
$n+2=5$



Все получили по 2 подарка

Тогда и для $n+2$ — это будет возможным

$\Downarrow$

такое возможно только при n — нечетное

Ответ: n — нечетное

Задача 2

1) По условию $\overline{x_1}=x_1$

$\overline{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\overline{x_2}<x_2$

$\frac{1}{2}(x_1+x_2)<x_2$

$\frac{1}{2}x_1<\frac{1}{2}x_2$

Следовательно, $x_1<x_2$

Рас-м 3 месяц, тогда

$\overline{x_3}<x_3$

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) < x_3$$

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2)+\frac{1}{3}x_3 < x_3$$

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2) < \frac{2}{3}x_3$$

$$x_1+x_2 < 2x_3$$

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2) < x_3$$

$\overline{x_2} < x_3$ – заметим, что среднее производство в n месяце меньше чем в n+1

2) Тогда докажем, что $\overline{x_{k-1}} < x_k$,

т.к $\overline{x_k} < x_k$ (по условию), то

$$\frac{x_1+x_2+x_3 \dots x_k}{k} < x_k$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots x_{k-1}}{k}+\frac{x_k}{k} < x_k$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots x_{k-1}}{k-1} < x_k$$

Следовательно, $\overline{x_{k-1}} < x_k$

3) Тогда $\overline{x_6} < x_6$ (по условию), то

$$\frac{1}{6}(x_1+x_2+\dots+x_6) < x_6$$

$$\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3 \dots x_5)+\frac{x_6}{6} < x_6$$

$$\frac{1}{6}(x_1+x_2 \dots x_5) < \frac{5}{6}x_6$$

$$\frac{x_1+x_2+\ldots x_5}{5} < x_6$$

$$\overline{x_6} < x_6$$

4) при $k \in [7;12]$

$\overline{x_k} > x_k$

при $k=7$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots x_7}{7} > x_7$$

$$\frac{x_1+x_2+x\ldots x_6}{6} > x_7$$

$\Downarrow$

$\overline{x_6} > x_7$

Заметим, что при $k \in [2;6]$ выполняется неравенство

$$\boxed{\overline{x_2} < \overline{x_3} < \overline{x_4} < \overline{x_5} < \overline{x_6}}$$

(т.к $\overline{x_k} = \dfrac{x_1+x_2+x_3 \cdot x_{k-1}+x_k}{k}$

$$\overline{x_k} = \frac{(k-1)\cdot\overline{x_{k-1}}+x_k}{k}$$

$$\overline{x_k} = \frac{x_k}{k} + \frac{(k-1)\cdot\overline{x_{k-1}}}{k}$$

$\Downarrow$

$$\overline{x_k} > \frac{x_k}{n} + \frac{(n-1)\cdot\overline{x_{k-1}}}{k}$$

$\Downarrow$

$\overline{x_k} > \overline{x_{k-1}}$)

при $k \in [7;12]$ знак меняется, то

$$\boxed{\overline{x_7} > \overline{x_8} > \overline{x_9} > \overline{x_{10}} > \overline{x_{11}} > \overline{x_{12}}}$$

5) Так как $\overline{x_k} < x_k$

$\Downarrow$

$\overline{x_{k-1}} < \overline{x_k}$ (т.к $\overline{x_{k-1}} < x_k$), тогда

$\overline{x_k} > x_k$

$\Downarrow$

$\overline{x_k} < \overline{x_{k-1}}$ при $k \in [7;12]$

Тогда запишем, что

$\overline{x_1} < \overline{x_2} < \overline{x_3} < \overline{x_4} < \overline{x_5} < \overline{x_6} > \overline{x_7} > \overline{x_8} \ldots > \overline{x_{12}}$

В течение первых шести месяцев производство увеличивалось, а в течение седьмого - двенадцатого уменьшалось, потому что среднее производство за 1 - 6 месяц больше

$\Downarrow$

максимальное среднее производство будет в шестом месяце ($\overline{x_6}$)

Ответ: $\overline{x_6}$ - в шестом месяце наибольшее среднее производство