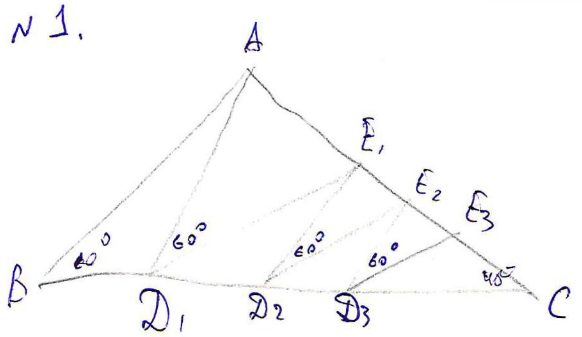
№ 1.



Пусть $\angle BAD_1 = 15°$.
Тогда $\angle D_1AC = 60°$
$\Rightarrow \triangle D_1AE_1$ – равносторонний
$\triangle D_2E_2E_1 \sim \triangle D_1AE_1 \sim \triangle D_2E_2E_3 \ldots$

$\Rightarrow$ все эти треугольники равносторонние $\Rightarrow D_1A + D_1E_1 = 2AE_1$
$\Rightarrow$ Нужная нам сумма – это $2(AE_1 + E_1E_2 + \ldots E_xC) = 2AC$.
По теореме синусов $\frac{AC}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 45°} \Rightarrow AC = \frac{AB\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow 2AC = 5\sqrt{6}$.

Т.к. $5\sqrt{6} > 12$ $(150 > 144)$, то ~~для~~ муха может преодолеть расстояние > 12.

~~№3 (продолжение).~~
~~Заметим, что каждый человек в построенном примере будет получать $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ подарков (если N детей).~~

№4.

Заметим, что если одна из точек лежит строго внутри выпуклой оболочки остальных, то $\Rightarrow$ утверждение задачи.
(Если 1 из точек лежит в треугольнике, тогда площадь этого треугольника ≥ 6). Если 1 точка лежит в четырёхугольнике, то площадь этого четырёхугольника ~~рав~~ ≥ 8. Тогда, проведя в нём диагональ, отсечём 1 треугольник площади ≥ 4).

№3 (продолжение).

Переход $N \to N+2$:
Выделим из графа 2 вершины A и B. В оставшемся графе всё работает по индукционному предположению. Выделим человека C со степенью вершины $N-1$. Тогда пусть C дарит подарки A и B, B дарит подарок C. Разделим оставшиеся $N-1$ вершину на 2 множества ~~по~~ вершин по $\frac{N-1}{2}$ штук $(a_1 \ldots a_{\frac{N-1}{2}}, b_1 \ldots b_{\frac{N-1}{2}})$.
Тогда пусть a_i дарит подарок b_i, а b_i – a_i.

№2 (продолжение).

$\overline{x_7} > x_7$

$x_1 + \dots + x_6 > 6x_7$

~~$\overline{x_6} = \frac{1}{6}\cdot(x_1+\dots+x_6) > \frac{1}{6}\cdot 6x_7 = x_7 \Rightarrow \overline{x_6} > \overline{x_7}$.~~

~~$\overline{x_i} > x_i \Rightarrow x_1 + \dots + x_{i-1} > (i-1)x_i$.~~

~~$\overline{x_{i-1}} = \frac{1}{i-1}\cdot(x_1+\dots+x_{i-1}) \Rightarrow \overline{x_i} = \frac{1}{i}\cdot((i-1)\overline{x_{i-1}} + x_i)$.~~

$x_1 + \dots + x_6 = 6\overline{x_6}$.

$\overline{x_7} = \frac{1}{7}\cdot(6\overline{x_6} + x_7)$.

$7\overline{x_7} = 6\overline{x_6} + x_7$.

$7\overline{x_7} = 6\overline{x_7} + \overline{x_7} > 6\overline{x_7} + x_7 \Rightarrow \overline{x_6} > \overline{x_7}$.

Аналогично $\overline{x_{12}} < \overline{x_{11}} < \overline{x_{10}} < \overline{x_9} < \overline{x_8} < \overline{x_7} < \overline{x_6}$.

Т.к. $\overline{x_6} > \overline{x_5} \geq \dots > \overline{x_1}$, то $\overline{x_6}$ — наибольшее.

Ответ: 6.

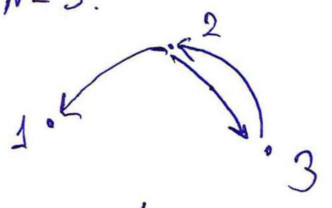
№3.

Пусть k подарков — получил каждый ребёнок, тогда всего kN подарков.
Т.к. каждый мог подарить от 0 до $N-1$ и каждый подарил различное число, то всего подарков $0+1+\dots+(N-1) = \frac{N\cdot(N-1)}{2}$.

$\frac{(N-1)}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (N-1) \vdots 2 \Rightarrow N$ — нечётное

Докажем по индукции для нечётного N.

База $N=3$:



(+)

Ответ: N — нечётное ($N > 1$)

Переход $N \to N+2$:

Выделим из графа 2 вершины. В оставшемся графе дети могут подарить подарки по предположению индукции. Тогда пусть мы выделили вершины A и B. Тогда проведём ребро $B \to A$. Теперь пусть $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ человек подарит подарки A, а $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ человек подарит подарки B. Тогда полученный граф удовлетворяет усл.

№5.

$y\cdot(z+3) = z+39 \quad (z \neq -3)$.

$(y-1)(z+3) = 36$. (1)

$x\cdot(z+3) = 2\cdot(z+3) + 432$

$(z+3)\cdot(x-2) = 432 \quad (2)$

$(2) : (1)$

$\frac{x-2}{y-1} = \frac{432}{36} \quad (y \neq 1)$.

$\frac{x-2}{y-1} = 12 \qquad x-2 = 12y-12$

$x = 12y-10$.

$xy - 2y = x + 106$

$(12y-10)\cdot(y-1) = 2y+106$.

$(6y-5)\cdot(y-1) = y+53$

$6y^2 - 5y - 6y + 5 = y + 53$.

$6y^2 - 12y - 48 = 0$

$y^2 - 2y - 8 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y = 4 \Rightarrow (z+3)\cdot +3 = 36 \Rightarrow z = 9. \Rightarrow x = 38. \\ y = -2 \Rightarrow z = -15 \Rightarrow x = -34 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-34, -2, -15)$ $(38, 4, 9)$.

№2.

$\overline{x_1} = x_1$, $\cancel{\overline{x_2} < x_2 \Rightarrow 2x_2 > x_1 + x_2}$, $2x_2 > x_1 + x_2$, $\underline{x_2 > x_1}$

$\overline{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \cancel{\frac{1}{2}(x_2 + x_2)} > \frac{1}{2}(x_1 + x_1) = x_1 = \overline{x_1} \Rightarrow \overline{x_2} > \overline{x_1}$.

$\overline{x_3} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) > \frac{1}{3}\cdot\left(x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \overline{x_2}$.

$\overline{x_3} < x_3 \Rightarrow 2x_3 > x_1 + x_2$

$\overline{x_4} < x_4 \Rightarrow 3x_4 > x_1 + x_2 + x_3$.

$4\overline{x_4} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > (x_1 + x_2 + x_3)\cdot\frac{4}{3} = 4\overline{x_3} \Rightarrow \overline{x_3} < \overline{x_4}$.

$\overline{x_5} < x_5 \Rightarrow 4x_5 > x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow$

$\overline{x_5} = \frac{1}{5}(x_1 + \dots + x_5) > \overline{x_4}$. Аналогично $\overline{x_6} > \overline{x_5}$.

√3 (продолжение).

Также пусть $a_1 \dots a_{N-2}$ дарят подарки A, а $b_1 \dots b_{\frac{N-1}{2}}$ — B.

Заметим, что каждый получил $\frac{N+1}{2}$ подарок. В графе на N у нас были все степени от 0 до $N-1$., т.к. эти люди подарили ещё по 2 подарка, то их степени от 2 до $N+1$, а степени ~~A и B у вер~~ 0 и 1 у вершин A и B.