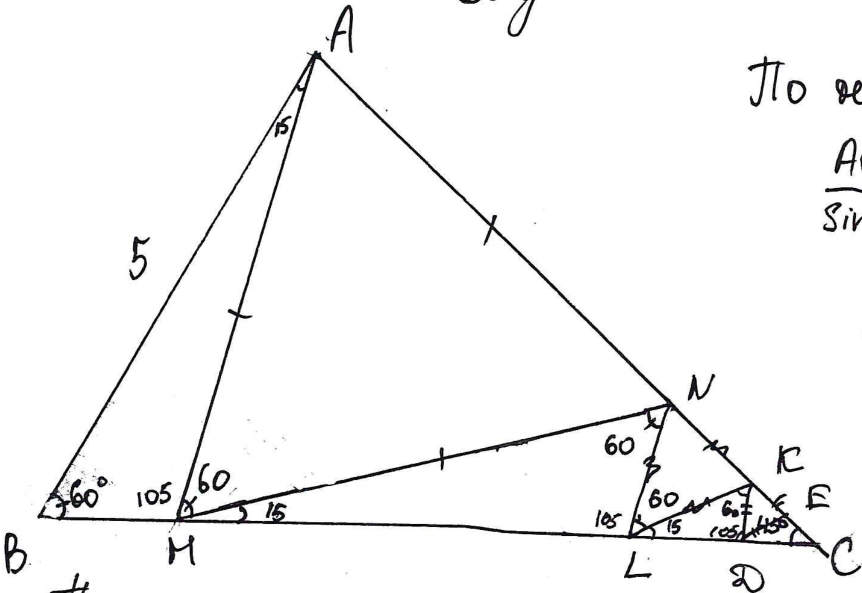
# Задача ~ 1




По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin 60} = \frac{AB}{\sin 45} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$$

Поэтому, если мы будем представлять полет мухи по сторонам равносторонних треугольников, как например на рисунке выше: ломаная $AMNLKDE$, где $AMN$, $NLK$, $KDE$ - равносторонние треугольники, то муха пролетит $2AN + 2NK + 2KE + \ldots =$ $= 2AC = 5\sqrt{6} = \sqrt{150} > 12$, а значит может оказаться, что муха через какое-то время пролетела больше 12 метров.

Найдем этот момент:

по т. sin в $\triangle ABM$: $\frac{AM}{\sin 60} = \frac{AB}{\sin 105} \Rightarrow AM = \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$

$$\frac{BM}{\sin 15} = \frac{AB}{\sin 105} = \frac{AM}{\sin 60} \Rightarrow BM = \frac{5\cdot\cancel{2\sqrt{2}}}{(\sqrt{3}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{3}-1)}{\cancel{2\sqrt{2}}} = \frac{5}{2+\sqrt{3}}$$

В силу подобия $\triangle MLN$ и $\triangle AMB$ (углы равны):

$$\frac{NL}{BM} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow NL = \frac{\cancel{5}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{1}{\cancel{5}} = \frac{5\sqrt{6}}{5+3\sqrt{3}}$$

Также $\triangle MNL \sim \triangle LKD$ (углы равны) $\Rightarrow \frac{KD}{NL} = \frac{LK}{MN} \Rightarrow$

$$KD = \frac{NL^2}{MN} = \frac{5\cdot 6 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(5+3\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{52+30\sqrt{3}}$$

И тогда путь мухи уже равен:

$$\cancel{\frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}} \; 2AM + 2NL + 2KD =$$

$$= 2\left(\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} + \frac{5\sqrt{6}}{5+3\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{52+30\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 5\sqrt{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{5+3\sqrt{3}} + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{52+30\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 5\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1-5+3\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}+2}{52+30\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 20\sqrt{18} - 30\sqrt{6} + \frac{5\sqrt{18}+5\sqrt{6}}{26+15\sqrt{3}} =$$

$$= 60\sqrt{2} - 30\sqrt{6} + (15\sqrt{2}+5\sqrt{6})(26-15\sqrt{3}) =$$

$$= 60\sqrt{2} - 30\sqrt{6} + 390\sqrt{2} - 225\sqrt{6} + 130\sqrt{6} - 75\sqrt{18} =$$

$$= 450\sqrt{2} - 125\sqrt{6} - 75\cdot 3\sqrt{2} = 225\sqrt{2} - 125\sqrt{6} =$$

$$= 125(1{,}8\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 125\sqrt{2}(1{,}8-\sqrt{3})$$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7321 \Rightarrow 125\sqrt{2}\cdot 0{,}0679 = 8{,}4875\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \Rightarrow$ путь равен $8{,}4875 \cdot 1{,}4142 =$

$= 12{,}003\ldots$ и это уже больше 12

Ответ: да, может оказаться

Задача №2

При $k \in [2;6]$ выполняется неравенство $\overline{x_k} < x_k$ по условию.

В этом случае $\overline{x_k} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k} = \dfrac{x_k}{k} + \dfrac{(k-1)\overline{x}_{k-1}}{k}$, т.к.

$(k-1)\overline{x}_{k-1} = x_1 + \ldots + x_{k-1}$

А значит $x_k = k\overline{x}_k - (k-1)\overline{x}_{k-1}$

По условию $\overline{x_k} < x_k \Rightarrow k\overline{x}_k - (k-1)\overline{x}_{k-1} > \overline{x}_k$

$(k-1)\overline{x}_k > (k-1)\overline{x}_{k-1}$, $k > 2$

А значит $\overline{x}_k > \overline{x}_{k-1}$, откуда получаем, что при $k \in [2;6]$ $\overline{x}_6$ будет максимальным, т.к. $\overline{x}_6 > \overline{x}_5 > \overline{x}_4 > \overline{x}_3 > \overline{x}_2$

При $k \in [7;12]$ выполняется неравенство

$\overline{x_k} > x_k$

$\overline{x_k} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k}{k} = \dfrac{x_k}{k} + \dfrac{(k-1)\overline{x}_{k-1}}{k}$

Откуда $k\overline{x}_k - (k-1)\overline{x}_{k-1} < \overline{x}_k \Rightarrow \overline{x}_{k-1} > \overline{x}_k$, откуда получаем, что при $k \in [7;12]$ $\overline{x}_7$ будет максимальным, т.к. $\overline{x}_7 > \overline{x}_8 > \overline{x}_9 > \overline{x}_{10} > \overline{x}_{11} > \overline{x}_{12}$.

$\cancel{\overline{x}_7 > x_7 \Rightarrow \frac{1}{7}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6) + \frac{x_7}{7} > x_7}$

$\cancel{\frac{1}{7} \cdot 6\overline{x}_6 > \frac{6}{7}x_7 \Rightarrow \overline{x}_6 > x_7}$

$$\overline{x_7} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{7} + \frac{x_7}{7} = \frac{6\overline{x_6}}{7} + \frac{x_7}{7} \Rightarrow$$

$$x_7 = 7\overline{x_7} - 6\overline{x_6} < \overline{x_7} \Rightarrow \overline{x_6} > \overline{x_7}$$

А значит среднее производство товара в 6 месяце с начала года было наибольшим

Ответ: в 6 месяце

Задача № 5

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 \\ yz + 3y = z + 39 \\ zx + 3x = 2z + 438 \end{cases}$$

Из 1 и 2 уравнения $y = \frac{z+39}{z+3}$ и $x = \frac{2z+438}{z+3}$.

$y = 1 + \frac{36}{z+3}$ и $\frac{x}{2} = 1 + \frac{216}{z+3} \Rightarrow 6y - 6 = \frac{216}{z+3}$ и $\frac{x}{2} - 1 = \frac{216}{z+3}$

А значит $6y - 6 = \frac{x}{2} - 1$ и $12y - 10 = x$

Получаем систему только из $x$ и $y$!

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 \\ 12y - 10 = x \end{cases} \quad \begin{cases} 12y - 10 = x \\ (12y-10)y - 2y = 12y - 10 + 106 \end{cases} \quad \begin{cases} 12y - 10 = x \\ y^2 - 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12y - 10 = x \\ \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -34 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 38 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

С учетом того, что $y = \frac{z+39}{z+3}$ получаем решения ~~урав~~ системы уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-34\\ y=-2\\ z=-15\end{cases}\\ \begin{cases}x=38\\ y=4\\ z=9\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-34; -2; -15)$ и $(38; 4; 9)$

## Задача № 3

По условию все дети получили равное кол-во подарков, пусть $k$. Значит, в сумме подарков $kN$. А также сказано, что один другому не мог подарить больше одного подарка, то есть максимальное кол-во подарков от одного человека — $N-1$. А также все дарили разное кол-во подарков и кто-то один мог ничего не подарить. Всего $N$ детей, а значит $N$ различных чисел кол-ва подарков, причем минимальное значение кол-ва: 0, а максимальное: $N-1$. И все числа целые. От 0 до $N-1$ будет $N$ целых чисел. Откуда выходит, что каждый ребенок подарил подарков от 0 до $N-1$. То есть всего подарков $0+1+2\ldots+N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$

Получаем, что $\frac{N(N-1)}{2} = kN \Rightarrow k = \frac{N-1}{2}$ и $k \in N$

А значит это возможно только при всех нечетных $N > 1$.

Докажем, что для всех $N$ вида $2m+1$ ($m>1$) условие будет выполняться.

При ~~⊠~~ $m=1$ будет 3 ребенка и если I подарит 2 подарка II и III, а III подарит подарок I и II ничего не подарит, то условие будет выполняться.

Пусть при $m=n$ это выполняется, то есть при $N=2n+1$.

А значит докажем, что и при $m=n+1$ это также будет выполняться, если при $m=n$ выполняется $N=2n+3$

Разность подарков при $N=2n+3$ и $N=2n+1$ равна:

$$\frac{(2n+3)(2n+2)}{2}-\frac{2n(2n+1)}{2}=(n+1)(2n+3)-n(2n+1)=$$

$$=4n+3$$

У нас добавилось еще 2 человека. ~~Поэтому если каждый из 2n людей при N=2n+1 (2n+1 не дарит подарков) подарит еще по 2 подарка~~ каждому из ~~, а 2n+2 подарит 2 подарка кому-то, а 2n+3 подарит 1 подарок, то мы~~

Пусть первые $n+1$ людей, которые подарили наибольшее кол-во подарков, подарят еще по 2 подарка двум добавленным. Уже будет $2n+2$ подарков.

6

Остается еще $2n+1$ подарок. Но их можно добавлять
~~Их разделим между оставшимися~~
только первым $2n+1$ людям, так как для двух последних людей уже подарено по $n+1$ подарков.

Получаем, что все кол-ва подарков которые подарили увеличились на 2, а значит и другие должны увеличиться.

Ребенок после $n+1$ людей подарит еще 2 подарка 1 и 2, а ребенок после этого ребенка подарит еще 2 подарка 3 и 4. Всего таких детей будет ~~2n+2~~ $n$, которые дарят ~~д~~ какими-то следующими номерами, так как еще один подарит 1 подарок, а второй не подарит ничего $(n+1+n+1+1=2n+3)$

А значит еще будет подарено $2n+1$ подарков и условие выполнится и для $m=n+1$

Допустим $n=2$, построим для наглядности таблицу, как происходит добавление подарков.

сколько дарят

сколько подарено

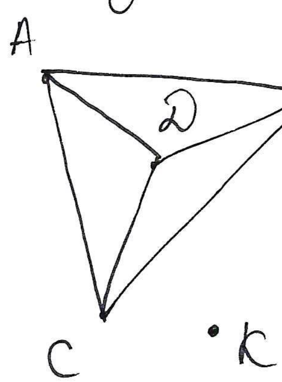
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | x | x | x | x | x | x |
| 2 | x | | x | x | | x | x |
| 3 | x | x | | | x | x | x |
| 4 | x | x | | | | | |
| 5 | | | x | x | | | |
| 7 | | | | | x | | |
| 8 | | | | | | | |

то как добавили

Ответ: при всех нечетных $N > 1$

Задача № 4

Если 5 точек составляют невыпуклый многоугольник:




$S_{ABD} \geq 2$

$S_{ADC} \geq 2 \Rightarrow S_{ABC} \geq 6$

$S_{DBC} \geq 2$