№5) $\begin{cases} xy-2y = x+106 \Rightarrow y = \dfrac{x+106}{x-2} \\ yz+3y = z+39 \Rightarrow y = \dfrac{z+39}{z+3} \\ zx+3x = 2z+438 \Rightarrow x = \dfrac{2z+438}{z+3} \end{cases}$

$$\frac{x+106}{x-2} = \frac{z+39}{z+3}$$

$$(x+106)(z+3) = (z+39)\cdot(x-2)$$

$$xz+3x+106z+318 = xz-2z+39x-78$$

$$xz+3x+106z+318-x\cancel{y}z+2z-39x+78=0$$

$$-36x+108z+396=0$$

$$-x+11+3z=0 \Rightarrow x=11+3z$$

$$z(11+3z)+3(11+3z)=2z+438$$

$$11z+3z^2+33+9z-2z-438=0$$

$$3z^2+18z-405=0$$

$\cancel{D=b^2\,4ac}$ $\quad z^2+6z-135=0$

$$D=b^2-4ac=36+135\cdot4=576=24^2$$

$$z_1=\frac{-6+24}{2}=9;\quad z_2=\frac{-6-24}{2}=-15$$

$$x_1=11+3z_1=11+27=38;\quad x_2=11+3z_2=11-45=-34$$

$$y_1=\frac{38+106}{38-2}=4;\quad y_2=\frac{-34+106}{-34-2}=-2$$

$$\begin{cases} x=38 \\ y=4 \\ z=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-34 \\ y=-2 \\ z=-15 \end{cases}$$

Ответ: $(38;4;9)$, $(-34;-2;-15)$

№2) $\bar{x}_1 = x_1$; $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; $\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$; $\bar{x}_{12} = \frac{1}{12}(x_1 + \ldots x_{12})$

$\bar{x}_k < x_k$, при $k \in [2;6]$

$\bar{x}_k > x_k$ при $k \in [7;12]$

1) $\bar{x}_1 = x_1$

2) $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + x_2) \Rightarrow x_2 = 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1$

$\bar{x}_2 < x_2$

$\bar{x}_2 < 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2 > \bar{x}_1$

3) $\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{3}(\bar{x}_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{3}(2\bar{x}_2 + x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 3\bar{x}_3 - 2\bar{x}_2$

$\bar{x}_3 < x_3$

$\bar{x}_3 < 3\bar{x}_3 - 2\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_3 > \bar{x}_2$

Аналогично:

4) $\bar{x}_4 > \bar{x}_3$

5) $\bar{x}_5 > \bar{x}_4$

6) $\bar{x}_6 > \bar{x}_5$

7) $\bar{x}_7 = \frac{1}{7}(x_1 + x_2 + \ldots + x_7) = \frac{1}{7}(6\bar{x}_6 + x_7) \Rightarrow x_7 = 7\bar{x}_7 - 6\bar{x}_6$

$\bar{x}_7 > x_7$

$\bar{x}_7 > 7\bar{x}_7 - 6\bar{x}_6 \Rightarrow \bar{x}_7 < \bar{x}_6$

Аналогично:

8) $\bar{x}_8 < \bar{x}_7$

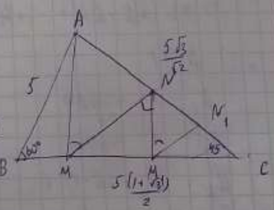
9) $\bar{x}_9 < \bar{x}_8$

. . .

12) $\bar{x}_{12} < \bar{x}_6 \Rightarrow \bar{x}_6$ - наиб. ср. производство пивовара

Ответ: в июне

№1) 1) По теореме синусов



$\frac{AB}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 60°} \Rightarrow AC =$

$= \frac{AB \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

2) По теореме косинусов

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cos 60° \cdot AB \cdot BC$

$25 + BC^2 - 5BC = \frac{75}{2}$

$BC^2 - 5BC - \frac{25}{2} = 0$

$D = b^2 - 4ac = \cancel{1 + 50} = 25 + 50 = 75$

$BC = \frac{5 + 5\sqrt{3}}{2} = \frac{5(1+\sqrt{3})}{2}$

3) Пусть $\angle MNA = 60° \Rightarrow \triangle AMN$, $\triangle NMN_1$ - равносторонний.

$\Rightarrow AM + MN = 2AN$, $NM + MN_1 = 2NN_1$

4) Сущ. т. N_k, которая максимально приближена

к т. $C \Rightarrow AN_k \approx AC$

$AN_k = AN + NN_1 + N_1N_2 + \ldots N_{k-1}N_k$

Т.к. все треугольники равносторонние, то
$AM + MN + NM + M_1N_1 + \ldots M_kN_k = 2(AN + NN_1 + \ldots + N_{k-1}N_k)$
$= 2AC$

$AC > 6$, т.к. $\left(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 > 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow AM + MN + NM + \ldots + M_kN_k > 12$

№3) $N > 1$

$a_1 = 0$ подарков

$a_2 = 1$ подарок

$a_N = a_1 + (N-1) \cdot 1 = (N-1)$ подарков

Всего подарков – $S_N = \frac{(a_1 + a_N)N}{2} = \frac{(0 + (N-1))N}{2} = \frac{(N-1)N}{2}$

Т.к. каждый получил поровну, то $S_N = N \cdot x$,
$\Rightarrow x = \frac{(N-1)}{2}$, значит

Каждый получил по $\frac{N-1}{2}$ подарков $\Rightarrow$
$\frac{N-1}{2}$ – целое число $\Rightarrow$ N – нечетное число.

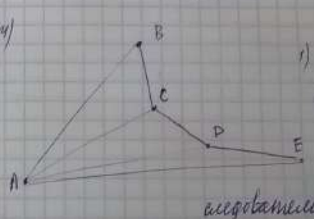
~~Ответ: при нечетных N~~

Приведем пример. Пусть есть $N-9$ детей.
$a_{N-9} = a_1 + (N-9-1) \cdot 1 = N-10$
$S_{N-9} = \frac{(a_1 + a_{N-9})(N-9)}{2} = \frac{(N-10)(N-9)}{2} \Rightarrow$ каждый получит по $\frac{(N-10)}{2}$ подарков.

Получается, что при $N-m$ детей каждый подарит разное кол-во подарков и получит по $\frac{(N-m-1)}{2}$ подарков.

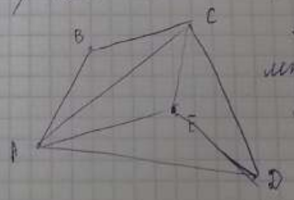
<u>Ответ:</u> ~~(...)~~ при нечетных N

№4)



1) Если внешняя оболочка треугольник ABE
Так как $S_{ACD} \geq 2$ и $S_{ADE} \geq 2$, $S_{ABC} \geq 2$, то $S_{ABE} \geq 6$,
следовательно $S_{ABE} \geq 3$

2) Если внешняя оболочка четырехугольник $ABCD$



~~Т.к. S_{AED}~~ Пусть т. E лежит внутри ACD.
Т.к. $S_{AED} \geq 2$, $S_{CED} \geq 2$,
то S_{ACD} будет больше 4,
следовательно не меньше 3.