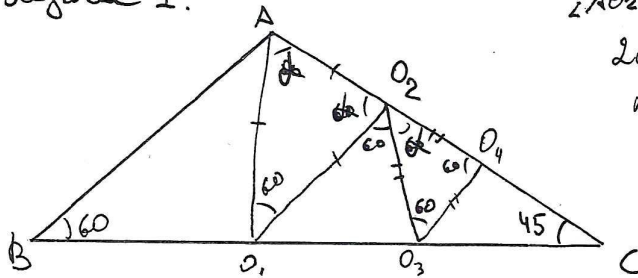


Задача 1.

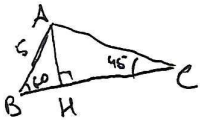


$$\angle AO_1O_2 + \angle O_1O_2O_3 + \angle O_2O_3O_4 = 180$$

$$2\alpha + 60 = 180$$

$\alpha = 60$ - противоречий при $\alpha = 60$ нет.

Может. Пусть муха будет летать по равносторонним треугольникам, тогда $\triangle AO_1O_2$ - равносторонний. Сдвигаем сторону AC на один из отрезков, например AO_2 , муха пролетит отрезки AO_1 и O_1O_2 , её путь составит $AO_1 + O_1O_2 = 2AO_2$, каждый раз сдвигаясь на x , x ^{по стороне AC} муха будет пролетать путь, равный $2x$. Через какое-то время муха достигнет точки C и её путь будет равен $2AC$. Проведём высоту из точки A.



$$\text{из } \triangle ABH: \sin 60 = \frac{AH}{AB} \quad AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{из } \triangle AHC \quad \sin 45 = \frac{AH}{AC} \quad AC = \frac{AH}{\sin 45} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Тогда путь мухи будет $S = 2AC = 2 \cdot 5\sqrt{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{1.5} \approx 12.24$
 $\Rightarrow$ может.

Задача 2.

Рассмотрим среднее производство товара за первые 6 месяцев

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_1 = x_1 \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \bar{x}_k < x_k \end{array} \right\} \text{ из этого получим } \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2 \quad \frac{1}{2}x_1 < \frac{1}{2}x_2 \quad x_1 < x_2 \quad \bar{x}_1 < x_2$$

за первые 3 месяца

$$\bar{x}_3 < x_3 \quad \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) < x_3 \quad \frac{1}{3}(x_1 + x_2) < \frac{2}{3}x_3 \quad \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_3$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \bar{x}_2, \text{ откуда следует } \bar{x}_2 < x_3$$

за первые 6 месяцев.

$$\bar{x}_6 < x_6 \quad \frac{1}{6}(x_1 + \dots + x_6) < x_6 \quad \frac{1}{6}(x_1 + \dots + x_5) < \frac{5}{6}x_6 \quad \frac{1}{5}(x_1 + \dots + x_5) < x_6, \text{ где}$$

$$\frac{1}{5}(x_1 + \dots + x_5) = \bar{x}_5 \Rightarrow \bar{x}_5 < x_6$$

Теперь рассмотрим среднее производство товара за 7 и 12 месяцев.

$$\bar{x}_7 > x_7 \quad \frac{1}{7}(x_1 + \dots + x_7) > x_7 \quad \frac{1}{7}(x_1 + \dots + x_6) > \frac{6}{7}x_7 \quad \frac{1}{6}(x_1 + \dots + x_6) > x_7,$$

$$\text{где } \frac{1}{6}(x_1 + \dots + x_6) = \bar{x}_6 \quad \bar{x}_6 > x_7 \text{ и т.д. } \bar{x}_6 > x_8 \quad \bar{x}_7 > x_8$$

или 1 из 3

Из моих рассуждений следует, что если $\bar{x}_2 < x_3$, то

x_3 может быть либо больше x_2 , либо $x_1 < x_3 < x_2$. Т.к. x_3 больше среднего арифметического двух предыдущих, то если включить третий месяц в подсчеты, получим $\bar{x}_2 < \bar{x}_3$, значит ~~следовательно~~ $x_1 < x_2 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Так как $\bar{x}_6 > \bar{x}_7$, то x_7 будет меньше минимального произведения за месяц. Если предыдущих месяцев, значит при включении седьмого месяца в подсчеты среднее значение среднего производства уменьшится $\Rightarrow \bar{x}_6 > \bar{x}_7$.

Значит среднее производство товара с начала года было наибольшим ~~уже~~ в июле.

Ответ: среднее производство было наибольшим за ^{первые} 6 месяцев.

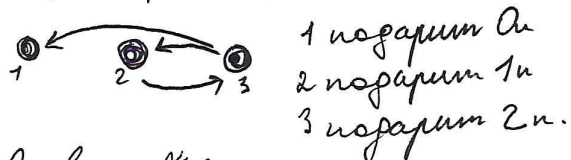
Задача 3.

После встречи N детей, у них у всех будет одинаковое число подарков. Так как один другому мог подарить всего лишь 1 или 0 подарков и все подарили разное кол-во подарков, то получается, что максимум ребенок мог подарить $N-1$ подарков, а минимально 0. Т.к. детей было N , а чисел от 1 до $(N-1)$ будет $(N-1)$, значит один из детей всегда подарит 0 подарков. Получится, что все числа от 0 до $N-1$ будут использованы, для подсчета ~~общего~~ числа подарков используем формулу арифметической прогрессии, где $a_1 = 0$, $a_n = N-1$, $d = 1$.

По формуле $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ получим $S_n = \frac{(0 + N-1) \cdot N}{2}$. Так

как $\frac{N}{2}$ детей всего N и у них у всех одинаковое число подарков, то $\frac{S_n}{N}$ будет целым, тогда $\frac{N-1}{2}$ будет кол-во подарков у одного ребенка. Это число должно быть целым $\Rightarrow N$ - будет четным.

Например $N = 3$



Ответ: N - все четные числа > 1 .

Задача 5

Запишем систему

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106, & (1) \\ yz + 3y = z + 39, & (2) \\ zx + 3x = 2z + 438, & (3) \end{cases}$$

Выразим y из (1) и (2) уравнения:

$y = \frac{x+106}{x-2}$ (5) Приравняем эти ур-ия и выразим x через z

$$y = \frac{z+39}{z+3}$$

$$\frac{x+106}{x-2} = \frac{z+39}{z+3} \quad \begin{matrix} \text{Обозначим:} \\ z \neq -3 \\ x \neq 2 \end{matrix}$$

$$(x+106)(z+3) = (z+39)(x-2)$$

$$xz + 3x + 106z + 318 = zx - 2z + 39x - 78$$

$$108z + 396 = 36x$$

$$6x = 18z + 66$$

$$x = 3z + 11 \quad (4)$$

Выразим x из ур-ия (3) и приравняем ур-ия (3) и (4)

$$3z + 11 = \frac{2z + 438}{z + 3}$$

$$(3z + 11)(z + 3) = 2z + 438$$

$$3z^2 + 9z + 11z + 33 = 2z + 438$$

$$3z^2 + 18z - 405 = 0 \quad | :3$$

$$z^2 + 6z - 135 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 135 = 576 = 24^2$$

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm 24}{2} = -3 \pm 12$$

$$\begin{cases} z_1 = -3 + 12 = 9 \\ z_2 = -3 - 12 = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = -15 \end{cases}$$

Подставим значения z_1 и z_2 в ур-ие (4).

$$x_1 = 3 \cdot 9 + 11 = 38$$

$$x_2 = -15 \cdot 3 + 11 = -34$$

Подставим значения x_1 и x_2 в ур-ие (5)

$$y_1 = \frac{38 + 106}{38 - 2} = 4$$

$$y_2 = \frac{-34 + 106}{-34 - 2} = -2$$

Получим решения системы I $x_1 = 38$ $y_1 = 4$ $z_1 = 9$,

II $x_2 = -34$ $y_2 = -2$ $z_2 = -15$.

лист 3 из 3