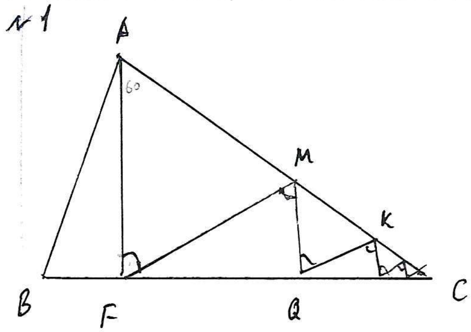
№1



1) Найдем длину AC по т. синусов

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} =$

$\frac{AB \cdot \sin 60}{\sin 45} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Пусть муха вылетела под углом 60° к стороне AM

$\Downarrow$

$\angle BAF = \angle A - \angle FAM = 75 - 60 = 15°$

~~ΔABF~~ $\angle AFB = 180 - \angle B - \angle BAF = 180 - 60° - 15 = 105°$

$\angle AFM = 60°$ (по условию)

$\Downarrow$

$\angle AMF = 180 - \angle FAM - \angle AFM = 180 - 60 - 60 = 60° \Rightarrow$ AFM – равносторонний Δ

$\angle MFQ = 180 - \angle AFM - \angle AFB = 180 - 60 - 105 = 15°$

Т-м ΔAFM и ΔMQK

AM ∥ MK (т.к. они лежат на одной прямой

AF и MQ (т.к. равны накрест лежащие углы (∠AFM и ∠FMQ) при секущей MF)

FM и KQ (т.к. равны накрест ~~лежащ~~ лежащие углы (FMQ и MQK) при секущей MQ)

$\Downarrow$

ΔAFM ~ ΔMQK – аналогично все треугольники, по сторонам которых летает муха будут подобны (т.к. все 3 их стороны параллельны

Т-м ΔAFM т.к. он равносторонний AF + FM = 2AM

Аналогично для всех остальных треугольников – муха пролетает расстояние в 2 раза больше, чем основание треугольника на стороне AC.

$\Downarrow$

В сумме муха пролетит расстояние в 2 раза больше, чем сторона AC

Докажем, что $2AC > 12$ $\quad AC > 6$

$\frac{5\sqrt{3}}{2} > 6$

$\frac{75}{2} > 36$ $\quad 37{,}5 > 36$ – доказано Ответ: можно.

№2 I Докажем, что если $\overline{x_n} < x_n$, то $x_n > \overline{x_{n-1}}$ $(n>0)$

$$\overline{x_n} < x_n$$

$$\frac{x_1+x_2+\dots x_n}{n} < x_n$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots x_{n-1}}{n} + \frac{x_n}{n} < x_n$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots x_{n-1}}{n} < \frac{(n-1)\,x_n}{n}$$ домножим на $\frac{n}{n-1}$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\dots x_{n-1}}{n-1} < x_n \Rightarrow \underline{x_n > \overline{x_{n-1}}} \quad (1)$$

II Докажем, что если $x_n > \overline{x_{n-1}}$, то $\overline{x_n} > \overline{x_{n-1}}$

$$\overline{x_n} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n}{n}$$

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_{n-1} = (n-1)\,\overline{x_{n-1}}$$

$\Downarrow$

$$\overline{x_n} = \frac{(n-1)\cdot\overline{x_{n-1}} + x_n}{n}$$

$$\overline{x_n} = \frac{x_n}{n} + \frac{(n-1)\cdot\overline{x_{n-1}}}{n}$$

$x_n > \overline{x_n} \Rightarrow \frac{\overline{x_n}}{n} < \frac{x_n}{n}$ (т.к. $n>0$)

$\Downarrow$

заменив в выражении $\frac{x_n}{n} + \frac{(n-1)\,\overline{x_{n-1}}}{n}$ $\frac{x_n}{n}$ на $\frac{\overline{x_n}}{n}$, получим, что

$\overline{x_n} > \frac{\overline{x_n}}{n} + \frac{(n-1)\,\overline{x_{n-1}}}{n}$ (т.к. мы заменили большее на меньшее)

$$\frac{(n-1)\,\overline{x_n}}{n} > \frac{(n-1)\,\overline{x_{n-1}}}{n}$$

$\Downarrow$

$$\underline{\overline{x_n} > \overline{x_{n-1}}} \quad (2)$$

№2 (продолжение)

т.к по условию $\overline{x_1} < \overline{x_1}$; $\overline{x_2} < x_2$; $\overline{x_3} < x_3$; $\overline{x_4} < x_4$; $\overline{x_5} < x_5$;

$\overline{x_6} < x_6$

$\Downarrow$

из (1) и (2) $\overline{x_6} > \overline{x_5} > \overline{x_4} > \overline{x_3} > \overline{x_2} > \overline{x_1}$

Очевидно, что если $\overline{x_n} < x_n \Rightarrow x_n > \overline{x_{n-1}} \Rightarrow \overline{x_n} > \overline{x_{n-1}}$, то

если $\overline{x_n} > x_n \Rightarrow x_n < \overline{x_{n-1}} \Rightarrow \overline{x_n} < \overline{x_{n-1}}$ (т.к везде знаки меняются на противоположные)

т.к $\overline{x_7} > x_7$; $\overline{x_8} > x_8$; $\overline{x_9} > x_9$; $\overline{x_{10}} > x_{10}$; $\overline{x_{11}} > x_{11}$; $\overline{x_{12}} > x_{12}$.

$\Downarrow$

$\overline{x_7} < \overline{x_6}$

$\overline{x_8} < \overline{x_9}$

$\overline{x_9} < \overline{x_8}$

$\overline{x_{10}} < \overline{x_9}$

$\overline{x_{11}} < \overline{x_{10}}$

$\overline{x_{12}} < \overline{x_{11}}$

$\Downarrow$

$\overline{x_1} < \overline{x_2} < \overline{x_3} < \overline{x_4} < \overline{x_5} < \overline{x_6} > \overline{x_7} > \overline{x_8} > \overline{x_9} > \overline{x_{10}} > \overline{x_{11}} > \overline{x_{12}}$

$\Downarrow$

$\overline{x_6}$ - наибольшее

Ответ: 6 месяц (июнь.)

№3 Каждый ~~ребё~~ ребёнок мог подарить не более, чем $N-1$ подарок, т.к. каждый мог подарить не более ~~2~~ одного подарка другому, а всего осталось $N-1$ детей.

Т.к каждый подарил разное кол-во подарков, а всего детей N и максимум подарков $N-1$ $\Rightarrow$ все дети подарили ~~от~~ от 0 до $N-1$ подарков каждый (иначе ~~не на кто~~ какие-то 2 ~~удалена~~ ребенка подарили равное кол-во подарков)

Найдем общее кол-во подарков $0+1+2+3+\dots N-1 =$

$$= \frac{0+N-1}{2} \cdot N = \frac{N(N-1)}{2}$$

Пусть каждый получил k подарков, тогда

$$k \cdot N = \frac{N(N-1)}{2}$$

$k = \frac{N-1}{2}$ т.к k - целое, то $\frac{N-1}{2}$ - целое $\Rightarrow$ N - нечетное

Г-м, как будут распределяться подарки

Разобьем всех детей на пары так, чтобы в сумме эти двое в сумме дарили N подарков (1 и $N-1$; 2 и $N-2$; 3 и $N-3$ ...), а ребёнок подаривший 0 подарков останется.

~~Тогда всего пар~~ Тогда всего пар $\frac{N-1}{2}$ (т.к всего чел N, и тот, кто подарил 0 остался без пары)

Пусть люди в каждой паре подарят подарки всем, включая друг друга, тогда каждая пара увеличивает кол-во подарков у всех на 1.

Тогда все получат по 1 подарку от $\frac{N-1}{2}$ пар, т.е всего $\frac{N-1}{2}$ каждый - что и требовалось.

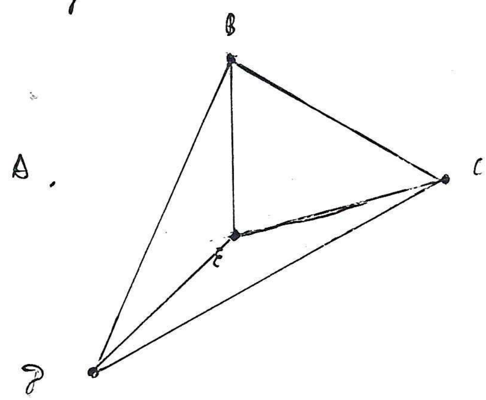
Ответ: N-нечетное

№4 ~~I-й случай, когда пятиу~~

1) Докажем, что никакие 3 точки не лежат на одной прямой

Очевидно что если 3 точки лежат на одной прямой, то образованный ими треугольник будет иметь площадь 0, что противоречит условию.

I-й случай, когда пятиугольник, образованный отмеченными точками — невыпуклый.



I-й ΔDBC

$S_{\Delta DEA} \geq 2 \quad S_{\Delta DEB} \geq 2 \quad S_{BEC} \geq 2$

$S_{BCD} = S_{DEA} + S_{DEB} + S_{BEC} \geq 6$

$\Downarrow$

что и требовалось доказать

2-й случай, когда пятиугольник выпуклый.

№5
$$\begin{cases} xy-2y=x+106 & (1) \\ yz+3y=z+39 & (2) \\ zx+3x=2z+438 & (3) \end{cases}$$

Из (1) $y=\dfrac{x+106}{x-2}$

Из (2) $y=\dfrac{z+39}{z+3}$

$$y=y=\frac{x+106}{x-2}=\frac{z+39}{z+3}$$

$$(x-2)(z+39)=(x+106)(z+3)$$

$$xz+39x-2z-78=xz+3x+106z+318$$

$$36x=108z+396$$

$$(4)\quad x=3z+11$$

Из (3) $x=\dfrac{2z+438}{z+3}$

$$x=x \Rightarrow \frac{2z+438}{z+3}=3z+11$$

$$2z+438=(3z+11)(z+3)$$

$$2z+438=3z^2+9z+11z+33$$

$$3z^2+18z-405=0$$

$$z^2+6z-135=0$$

$$D=36+4\cdot135=576=24^2$$

$$z=\frac{-6\pm24}{2}\qquad z_1=9,\quad z_2=-15$$

$$\Downarrow$$

$$x_1=3z+11=38\qquad y_1=\frac{z+39}{z+3}=4$$

$$x_2=-34\qquad y_2=-2$$

Ответ: 1) $x=38$ $y=4$ $z=9$

2) $x=-34$ $y=-2$ $z=-15$