

5°5

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 \\ yz + 3y = z + 36 \\ zx + 3x = 2z + 438 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)y = x-2 + 108 \\ (z+3)y = z+3 + 36 \\ (z+3)x = 2(z+3) + 432 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} (x-2)(y-1) = 108 = 36 \cdot 3 \\ (y-1)(z+3) = 36 \\ (z+3)(x-2) = 432 = 36 \cdot 12 \end{cases}$$

Теперь перемножим
эти три равенства

$$(x-2)^2 \cdot (y-1)^2 \cdot (z+3)^2 = 108 \cdot 36 \cdot 432 = 36^4$$

Тогда у нас возможно 2 решения

$$(x-2) \cdot (y-1) \cdot (z+3) = 36^2$$

$$(x-2) \cdot (y-1) \cdot (z+3) = -36^2$$

Теперь выразим через последнюю
систему с тремя уравнениями:

$$a) \begin{cases} x-2=36 \\ y-1=3 \\ z+3=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=38 \\ y=4 \\ z=9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x-2=-36 \\ y-1=-3 \\ z+3=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-34 \\ y=-2 \\ z=-15 \end{cases}$$

Ответ: $x=38, y=4, z=9; x=-34, y=-2, z=-15$.

5.2

Определим функцию $f(k)$ $\bar{X}_{k+1} - \bar{X}_k$. Тогда:

$$\begin{aligned} f(k) &= \bar{X}_{k+1} - \bar{X}_k = \frac{1}{k+1} (x_1 + \dots + x_{k+1}) - \\ &- \frac{1}{k} (x_1 + \dots + x_k) = \frac{1}{k+1} (x_1 + \dots + x_{k+1}) - \frac{1}{k} (x_1 + \dots + x_k) - \\ &- \frac{1}{k} x_{k+1} + \frac{1}{k} x_{k+1} = \bar{X}_{k+1} - \frac{1}{k} (x_1 + \dots + x_{k+1}) + \frac{1}{k} x_{k+1} = \\ &= \bar{X}_{k+1} - \frac{k+1}{k} \cdot \bar{X}_{k+1} + \frac{1}{k} x_{k+1} = \\ &= \frac{1}{k} (x_{k+1} - \bar{X}_{k+1}). \text{ Таким образом} \\ f(k) &= \frac{1}{k} (x_{k+1} - \bar{X}_{k+1}). \end{aligned}$$

При k от 1 до 5, по условию: $\bar{x}_{k+1} < \bar{x}_k$, а
при k от 6 до 11, по условию: $\bar{x}_{k+1} > \bar{x}_k$. Тогда

$$f(1) > 0 \quad \bar{x}_1 < \bar{x}_2$$

$$f(2) > 0 \quad \bar{x}_2 < \bar{x}_3$$

...

...

$$f(5) > 0 \quad \bar{x}_5 < \bar{x}_6$$

$$f(6) < 0 \quad \bar{x}_6 > \bar{x}_7$$

...

...

$$f(11) < 0 \quad \bar{x}_{11} > \bar{x}_{12}$$

Отсюда получаем,
что

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_5 < \bar{x}_6 > \bar{x}_7 > \dots > \bar{x}_{11} > \bar{x}_{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}_6^* - \text{самое большое число} \Rightarrow$$

В шестой месяц среднее производство
товара с начала года было наибольшим.

Ответ: в шестом месяце (июне).

53

Чтобы выполнялось условие задачи, должно быть подарено $0, 1, 2, \dots, n-1$ подарков. Общая сумма $\frac{(n-1) \cdot n}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Каждый получил $\frac{n-1}{2}$ подарков.

Т.к. каждый получил натуральное число подарков, то делаем вывод, что n — нечётное число $\Rightarrow n = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$, т.к. $n > 1$. Рассмотрим пример для $n = 5$. Тогда набор подарков: $0, 1, 2, 3, 4$. Отсюда:

	1	2	3	4	5
1	X	0	0	0	0
2	0	X	0	0	1
3	0	0	X	1	1
4	1	1	1	X	0
5	1	1	1	1	X

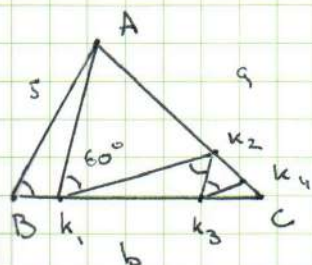
То есть тот, у кого $n-1$ подарков дарит подарки всем, а ему дарит тот, у кого 1. Тот, у

кого $n-2$ подарка дарит всем кроме одного, а тот, у кого 2 дарит этому одному и тому, у кого $n-2$. Таким образом можно разбить всех детей на пары (отдельно оставим того, у кого 0), а далее сумма подарков в каждой из $\frac{n-1}{2}$ пар будет равна n , т.е. пары будут из $n-1$ и 1 ; $n-2$ и 2 и т.д.

Далее каждая пара дарит каждому из n детей по подарку и в сумме каждому подарят $\frac{n-1}{2}$ подарка.

Ответ: $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

В этой задаче возможны 2 случая:
 I. Муха летит именно так, как показано на рисунке в задаче.



Тогда обозначим $AK_1 = l_1$,
 $K_1K_2 = l_2$, $K_2K_3 = l_3$ и т.д.
 $AB = 5$; $AC = a$; $BC = b$.

$$\frac{5}{\sin 45} = \frac{a}{\sin 60} = \frac{b}{\sin 75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \cdot \sqrt{3}/2 \\ b = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 75 \end{cases} \Rightarrow a + b > 12.$$

т.к. $\angle AK_1K_2 = \angle K_1K_2K_3 = \angle K_2K_3K_4$ и т.д. то
 прямые $l_1 \parallel l_3 \parallel l_5 \dots$ и $l_2 \parallel l_4 \parallel l_6 \dots$.
 $\angle AK_1K_2$ Все эти прямые подобны с
 неким коэффициентом k , т.е.

$$l_3 = \frac{l_1}{k}; l_4 = \frac{l_2}{k}; l_5 = \frac{l_1}{k^2}; l_6 = \frac{l_2}{k^2} \dots$$

Отсюда следует, что:

$$S_n = \sum_{i=1}^n l_i = (l_{n-1} + l_n) \cdot \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots\right)$$

(при n - четн.)

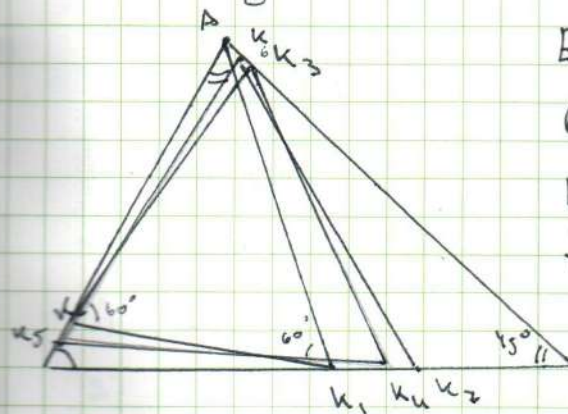
$$\dots + \frac{1}{k^{\frac{n-1}{2}}} \Big) + \cancel{k} \frac{1}{k^{\frac{n-2}{2}}} \cdot l_1 = (l_1 + l_2) \cdot$$

$$\cdot \frac{(1 - \frac{1}{k})}{1 - \frac{1}{k^{\frac{n-2}{2}}}} + \frac{l_1}{k^{\frac{n-2}{2}}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$$

$$= 2(l_1 + l_2) < 5 + 6 < 12.$$

Ответ: нет, не может.

II. Муха летит не так на рисунке в задаче



Если муха вылетит

в направлении точки

K_3 , где $\angle BAK_1 = 45^\circ$

Тогда отрезки ломан-

ной, по кот. она летит

всегда будут больше равностороннего тре-

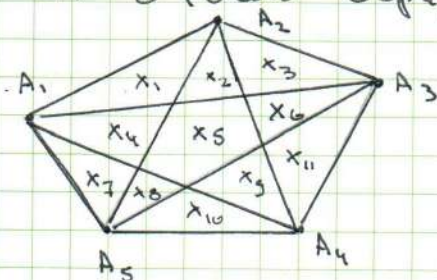
угловника, который лежит внутри. Притом на каждом круге периметр равностор. Треугол. больше периметра предыдущего $\Rightarrow$ длина ломаной станет больше 12.

Ответ: да, может.

54

Тут возможны 2 случая:

I. Стожки обрезают выпуклый пяти-к.



Всего возможных наборов треугольников

$$C_3^5 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Предположим, что не существует треугольника с площадью $S \neq 3$, тогда

1) $x_1 + x_2 + x_3 < 3$

2) $x_1 + x_4 + x_5 < 3$

$$3) x_7 + x_8 + x_{10} < 3$$

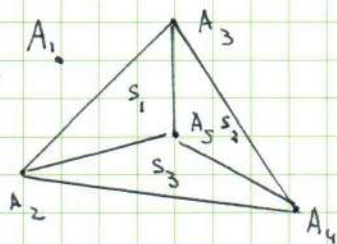
...

$$10) x_2 + x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} < 3$$

Сложим и получим: $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \dots + 3x_1 < 30$, $15 + 20 = 35$, т.е.

$35 < 30$ — противоречие.

II. 5 точек образуют не выпуклый 5-угольник



Тогда по л-му Дирхле существует треугольник, в котором есть одна из 5

точек $\Rightarrow$ площадь этого

треугольника равна $S_1 + S_2 + S_3 \geq 2 + 2 + 2 = 6$,

а $6 > 3$ — противоречие.



Найдутся такие 3 точки, кот. образуют треугольник, площадью не меньше 3.

И.Т.Д.