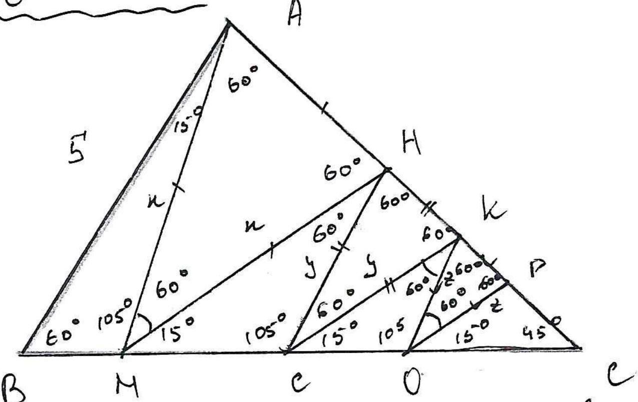
Задание №1



Дано:
$\triangle ABC$
$\angle B = 60^\circ$
$\angle C = 45^\circ$
$AB = 5$
пролетела > 12 - ?

Предположим, что такое возможно. Приведём пример. Пусть треугольники АМН, НСК, КОР - равносторонние, и все последующие треугольники, аналогичные им по которым пойдёт муха, до того как попадёт в точку С.
Найдём по теореме синусов сторону АС, в треугольнике АВС.

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{2AC}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \frac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Теперь последовательно рассмотрим каждый из треугольников.

$\triangle$ АМН

муха пойдёт по пути АМ + МН, данное больше АН. пройденное расстояние в 2 раза больше АН. (т.к. по построению $\triangle$АМН - равносторонний.

$\triangle$ НСК

муха пойдёт по пути НС + СК данное расстояние в 2 раза больше НК. Аналогично со следующими треугольниками, по которым пройдёт муха, до попадания в точку С. Таким образом пройденное мухой расстояние будет как минимум в 2 раза больше стороны AC.

$S \geq AC \cdot 2$

$S \geq \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 2$

$S \geq 5\sqrt{6}$

$S \geq \sqrt{150}$

$\sqrt{144} \leq \sqrt{150} \leq \sqrt{169}$

$12 \leq \sqrt{150} \leq 13$

Получили, что может так оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 12 м.

Приведём конкретный пример.

Найдём по теореме синусов стороны AM; HC; PO из треугольников AMH, HCK, HOP.

$AM = x$; $HC = y$; $PO = z$

1) $\frac{5}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 60^\circ}$

$\frac{5}{\sin(135^\circ - 30^\circ)} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

$\frac{5}{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

$5(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

$x = \frac{15\sqrt{6} - 15\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

$x = \frac{15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{2}$

2) $\frac{\frac{15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{2}}{\sin 105^\circ} = \frac{y}{\sin 15^\circ}$

$\frac{15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{2\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{y}{\sin(45^\circ - 30^\circ)}$

$\frac{15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$

$\left(\frac{15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}\right) 2 = \frac{4y}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

$\frac{2(15\sqrt{2} - 5\sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4y}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

$20\sqrt{3} - 30 = \frac{4y}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

$y = \frac{45\sqrt{2} - 25\sqrt{6}}{2}$

3) $\frac{\frac{45\sqrt{2} - 25\sqrt{6}}{2}}{\sin 105^\circ} = \frac{z}{\sin 15^\circ}$

$\frac{45\sqrt{2} - 25\sqrt{6}}{2\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4z}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

$4z = 330\sqrt{2} - 190\sqrt{6}$

$z = \frac{165\sqrt{2} - 95\sqrt{6}}{2}$

Так как они проходят это расстояние дважды, имеем:

$$15\sqrt{2} - 5\sqrt{6} + 45\sqrt{2} - 25\sqrt{6} + 165\sqrt{2} - 95\sqrt{6} =$$

$$= 225\sqrt{2} - 125\sqrt{6} =$$

$$= 25(9\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) \approx 12.$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$\sqrt{6} \approx \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 1,4\cdot 1,7 = 2,38 \;\Big|\Rightarrow\; 25(9\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) \approx 12$$

Таким образом получаем, что может так оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 12 м. Уже после третьего прохода равносторонного треугольника.

Задание №5

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106, \\ yz + 3y = z + 39, \\ zx + 3x = 2z + 438, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{106 + 2y}{y - 1}, & (1) \\ y = \dfrac{z + 39}{z + 3}, & (2) \\ z = \dfrac{438 - 3x}{x - 2}. & (3) \end{cases}$$

Подставим (3) в (2)

$$y = \frac{\dfrac{438 - 3x}{x - 2} + 39}{\dfrac{438 - 3x}{x - 2} + 3} = \frac{\dfrac{438 - 3x + 39(x - 2)}{x - 2}}{\dfrac{438 - 3x + 3(x - 2)}{x - 2}} =$$

$$= \frac{438 - 3x + 39x - 78}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{438 - 3x + 3x - 6} =$$

$$= \frac{360 + 36x}{432} \quad (5)$$

Выразим из (1) y

$$y(x - 2) = 106 + x$$

$$y = \frac{106 + x}{x - 2} \quad (4)$$

$$\Downarrow$$

Теперь приравняем (4) и (5), получим:

$$\frac{360+36x}{432} = \frac{106+x}{x-2}$$

$$(360+36x)(x-2) = 432(106+x)$$

$$360x + 36x^2 - 72x - 360\cdot 2 = 432\cdot 106 + 432x$$

$$36x^2 + 288x - 720 = 432\cdot 106 + 432x$$

$$36x^2 - 144x - 720 - 432\cdot 106 = 0$$

$$36x^2 - 144x - 46512 = 0$$

$$x^2 - 4x - 1292 = 0$$

$$x(x+34) - 38(x+34) = 0$$

$$(x+34)(x-38) = 0$$

$x = -34$ или $x = 38$

Подставим полученные значения в (4)

$$y = \frac{106-34}{-34-2} = \frac{72}{-36} = -2$$

$$y = \frac{106+38}{38-2} = 4$$

Значения x, подставим в (3)

$$z = \frac{438-3(-34)}{-34-2} = -15$$

$$z = \frac{438-3(38)}{38-2} = 9$$

Таким образом полученные значения равны $x=-34$ $y=-2$ $z=-15$;
$x=38$ $y=4$ $z=9$

Ответ: $(-34; -2; -15)$; $(38; 4; 9)$.

Задание № 3

Пусть у N детей было k подарков у каждого. Тогда всего подарков было $N \cdot k$. По условию все дети дарили разное кол-во подарков. Тогда сумма полученных подарков

Это различные числа от 0 до $N-1$, учитывая то, что кто-то мог не подарить подарок вообще.

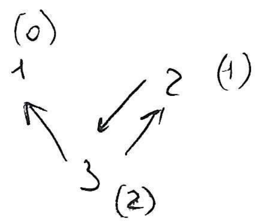
$$\frac{N}{2}\cdot(N-1) = k\cdot N$$

Так как k - точно целое число, то имеем:

$x = \frac{N-1}{2}$, тогда N - является нечётным числом.

Получим, что для каждого N - нечётного числа выполняется условие. Приведем пример для 3:

У нас есть трое детей, обозначим их условно 1, 2, 3. Стрелками укажем кто кому подарит подарки.



Для N-ого, будут выполняться следующее правило: пусть $N = 2m+1$. Тогда первый подарит 0; второй $2m$; третий $2m-1$ и т.д.

Ответ: при N - нечётных возможно выполнение данного условия.

Задание № 2

$\overline{x_1} = x_1$; $\overline{x_2} = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$; $\overline{x_3} = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$;

$\overline{x_{12}} = \frac{1}{12}(x_1+x_2+\dots x_{12})$.

Найдём закономерность производства товара, воспользовавшись условием, что

1) $\overline{x_k} < x_k$ от 2 до 6

Для x_2:

$\overline{x_2} < x_2$

$\frac{1}{2}(x_1+x_2) < x_2$

$\frac{1}{2}x_1 < \frac{1}{2}x_2$

$x_1 < x_2$

$\overline{x_1} < x_2$

② Для x_3:

$\overline{x_3} < x_3$

$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) < x_3$

$\frac{1}{3}(x_1+x_2) < \frac{2}{3}x_3$

$\frac{1}{2}(x_1+x_2) < x_3$

$\overline{x_2} < x_3$

Аналогично для x_4, x_5.

③ Для x_6:

$\overline{x_6} < x_6$

$\frac{1}{6}(x_1+x_2+\dots x_6) < x_6$

$\frac{1}{6}(x_1+x_2+\dots x_5) < \frac{5}{6}x_6$

$\frac{1}{5}(x_1+\dots x_5) < x_6$

$\overline{x_5} < x_6$

④ Для x_7: Условие, что $\overline{x_k} > x_k$ от 7 до 12

$\overline{x_7} > x_7$

$\frac{1}{7}(x_1+x_2+\dots x_7) > x_7$

$\frac{1}{7}(x_1+x_2+\dots x_6) > \frac{6}{7}x_7$

$\frac{1}{6}(x_1+\dots x_6) > x_7$

$\overline{x_6} > x_7$

Таким образом получили, что с x_1 по x_6 значения возрастать, а с x_7 по x_{12} уменьшится.

$\overline{x_5} < x_6$

$\overline{x_6} = \frac{1}{6}(x_1+\dots x_6)$ $\overline{x_5}$

$\overline{x_6} = \frac{1}{6}((x_1+x_2+\dots x_5)+x_6)$

$\overline{x_6} > \frac{\overline{x_6}}{6} + 5\frac{\overline{x_5}}{6}$

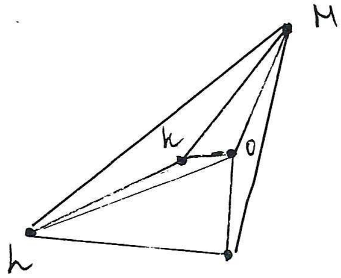
$x_6 > \overline{x_6}$

Получили, что своего пика среднее производство товара с начала года и до конца достигло в x_6. Таким образом, имеем ответ: В 6 месяце производство было наибольшим.

Задание №4

Рассмотрим возможное расположение точек.

1) когда в основании лежат три точки, а внутри него две точки:



площади треугольников MKN, MNO и KNO по условию не меньше 2.

$S_{MNO} \geq 2$ $S_{KNO} \geq 2$ $S_{MKN} \geq 2$

Рассмотрим $\triangle MON$

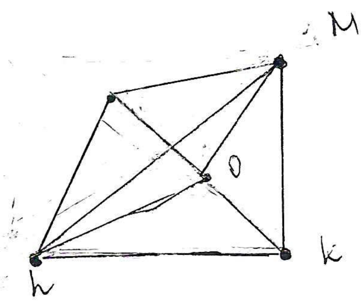
его площадь равна сумме площадей его составляющих, то есть:

$S_{MON} = S_{MKN} + S_{MNO} + S_{KNO}$.

$S \geq 2 + 2 + 2$

$S \geq 6$. Что больше трёх.

2) Рассмотрим случай, когда в основании лежит четырёхугольник, а внутри него одна точка.



Аналогично для данного случая.

$S_{\triangle MNK} = S_{MOK} + S_{NOK} + S_{MON}$

Получаем, что для выпуклого многоугольника (треугольного и четырёхугольного в основании) обязательно найдутся три точки, образующие треугольник площади не меньше 3.