№5

$$\begin{cases} xy-2y = x+106 \\ yz+3y = z+39 \\ zx+3x = 2z+438 \end{cases} \qquad \begin{cases} (y-1)(x-2) = 108 \ (1) \\ (y-1)(z+3) = 36 \ (2) \Rightarrow \\ (x-2)(z+3) = 432 \ (3) \end{cases} \qquad \begin{matrix} y \neq 1 \\ x \neq 2 \\ z \neq -3 \end{matrix}$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{x-2}{z+3} = 3 \qquad\qquad x = 3z+11$$

$$\frac{(3)}{(1)} = \frac{z+3}{y-1} = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 4y-7$$

$$\frac{(3)}{(2)} = \frac{x-2}{y-1} = 12 \qquad\qquad x = 12y-10$$

Выразим все корни через z.

$$\begin{cases} x = 3z+11 \\ y = \dfrac{z+7}{4} \\ z = z \end{cases} \quad \text{в (3):} \quad 3(z+3)^2 = 432$$

$$(z+3)^2 = 144$$

$$\left[\begin{array}{l} z+3 = 12 \\ z+3 = -12 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} z = 9 \\ z = -15 \end{array}\right.$$

тогда:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 38 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{cases} (a) \\ \begin{cases} x = -34 \\ y = -2 \\ z = -15 \end{cases} (б) \end{array}\right.$$

проверка:

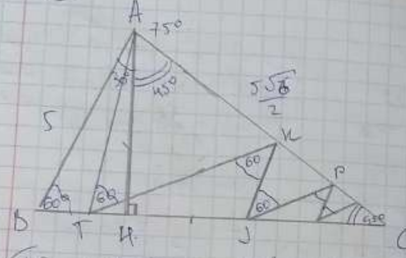
а) $\begin{cases} (4-1)(38-2) = 108 \text{ - уд} \\ (4-1)(9+3) = 36 \text{ - уд} \\ (38-2)(9+3) = 432 \text{ - уд} \end{cases}$

б) $\begin{cases} (-2-1)(\cancel{38}\,{-34}-2) = 108 \text{ - уд.} \\ (-2-1)(-15+3) = 36 \text{ - уд} \\ (-34-2)(-15+3) = 432 \text{ - уд.} \end{cases}$

Ответ запишем в виде пар $(x; y; z)$

Ответ: $\{(38; 4; 9); (-34; -2; -15)\}$.

№1.



(по т. косинусов: $AC^2 + BC^2 - 2AC\,BC\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 25$

$AC^2 + BC^2 - \sqrt{2}AC\,BC = 25$

$25 + BC^2 - 10BC\,\frac{1}{2} = AC^2$

$25 + BC^2 - 5BC = AC^2$

$AC = \sqrt{25 + BC^2 - 5BC}$

$25 + BC^2 - 5BC + BC^2 - \sqrt{50 + 2BC^2 - 10BC}\ \ BC = 25$

$2BC - 5 = \sqrt{50 + 2BC^2 - 10BC}$

$4BC^2 - 20BC + 25 = 50 + 2BC^2 - 10BC$

$D = 100 + 25 \cdot 2 \cdot 4 = 300 = (3\sqrt{10})^2$

$2BC^2 - 10BC - 25 = 0.$

$BC > 5$

$\left[\begin{array}{l} BC = \frac{10 - 3\sqrt{10}}{4} \text{ – не подход., т.к.} \\ BC = \frac{10 + 3\sqrt{10}}{4} \end{array}\right.$)

Проведем высоту AH тогда $\angle BAH = 30°$ (180 − 90 − 60)

тогда, т.к. $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$; $BH = 2{,}5$

$AH = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$AH = HC$ ($\triangle AHC$ р/б),

$BC = BH + HC = \frac{5 + 5\sqrt{3}}{2}$

по т. cos:

$AC^2 = 25 + \left(\frac{5 + 5\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5 + 5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$

$AC^2 = 25 + \frac{100 + 50\sqrt{3}}{4} - \frac{50 + 50\sqrt{3}}{4} = \frac{150}{4}$

$AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

Пусть муха вылетела под углом 15° ($\angle BAT = 15°$)

тогда $\angle ATK = 60° \Rightarrow$

$\triangle ATK$ – р/с и

$AT + TK = 2AK$.

$\angle KAT = \angle PKJ$ т.к. $AT \parallel KJ$ (внутр. накрест леж. равны)

тогда $\triangle KPJ$ – р/с, (по иску поиме р.с) и

$KJ + JP = 2KP$. Тогда, сумма пройд. расст.

до того, пока муха $\to C$ будет $\to 2(AK + KP + P\ldots C) =$

$= 2AC$.

$2AC = 5\sqrt{6}$? 12

$5\sqrt{6}$? 12

150 ? 144 $\Rightarrow 2AC > 12 \Rightarrow$ когда-то муха пройдет больше 12 м.

Ответ: да, может

№3 Ответ: при $N=2k+1$, где $k \in N$

Пусть встретилось N детей. Тогда Nk – кол-во подарков, где k – кол-во подарков на человека, причем ребенок не может подарить более $N-1$ подарка ($N-1$ – кол-во детей, каждому по 1 – max). Тогда понятно, что ребенок дарит от 0 до $N-1$ вещей.

Тогда $S_{под} = \frac{(0+N-1)\cdot N}{2} = \frac{N^2-N}{2} = kN$

$2kN = N^2 - N$

$2k = N-1 \Rightarrow$

$N = 2k+1 \Rightarrow$

при N нечетном такое может быть.

Пусть детей $2N+1$, берем N-ребенка (пронумеровываем), и N дает всем детям подарки, $N-1$ дает всем детям кроме 1, $N-2$ всем, кроме 1 и 2 и т.д.

доходим до момента, где один подходит.

$I \to 1$, $II \to 1$, ..., $N-1 \to N-1$ X_1

$N-1$ дает всем, $N-2$ дает всем кроме $N-1$,

а т.д. и в итоге ~~последний~~ I никому не дает,

и у всех по N подарков $\Rightarrow 2N+1$ подходит.

№2

$\overline{x_1} = x_1$ $\quad \overline{x_2} = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\overline{x_3} = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, ..., $\overline{x_{12}} = \frac{1}{12}(x_1+x_2+\ldots+x_{12})$

$\overline{x_1} = x_1$ $\quad x_2 > \frac{1}{2}(x_1+x_2)$ $\quad x_3 > \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$

$\Downarrow$

$x_2 > x_1$ $\quad 2x_3 > x_1+x_2$

$x_3 > x_2$

Получается, что $x_2 \to x_6$ (берем ребенка) идет возрастание (как $\overline{x_k} > x_k$) $\Rightarrow$

$\overline{x_1} - \overline{x_6} \uparrow$ (берем равенство) рассмотрим переход с 6 на 7.

$$42 \cdot \begin{cases} \frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6) < x_6 \\ \frac{1}{7}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) > x_7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6) < 42x_6 \\ 6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) \overset{?}{>} 42x_7 \end{cases} \Rightarrow$$

$42x_6 + 6(x_1 + \ldots + x_7) > 42x_7 + 7(x_1 + \ldots + x_6)$.

$42x_6 + 6x_7 > 42x_7 + x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.

$42x_6 - 48x_7 > x_1 + \ldots + x_6 > 0 \Rightarrow$

$42x_6 > 48x_7$

$x_6 > \frac{48}{42}x_7 \Rightarrow x_6 > x_7$, но, т.к.

$x_6 > x_7$, то $\overline{x_7} < \overline{x_6}$

Аналогично 2-6 получаем, что $x_7 - x_{12} \downarrow \Rightarrow$ (возм равенство)

$\Rightarrow \overline{x_7} - \overline{x_{12}} \downarrow \Rightarrow$ (возм равенство) $\Rightarrow$

$\overline{x_1} < (\leq \overline{x_2}) \ldots < \overline{x_6} \geq \overline{x_7} \underset{(\geq)}{>} \overline{x_8} \underset{(>)}{\geq} \ldots \geq \overline{x_{12}}$

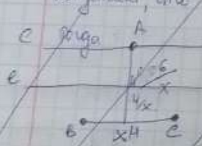
$\overline{x_6}$ - наибольший.

Ответ: в 6 месяц среднее производство было наибольшим

№4

Допустим, что площади все < 2 < 3.

Тогда

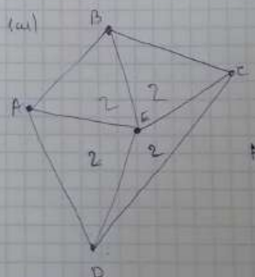


Отметим две точки B и C и пост-им ... тогда, можно, что площадь будет от 2 до 3, если $\frac{4}{x} < H(A;BC) \leq \frac{6}{x}$ следовательно

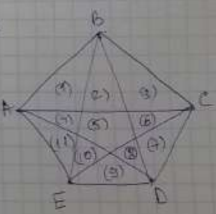
третья точка должна быть на в промежутке ($S = \frac{1}{2} h\, BC = \frac{1}{2} x\, h$) т.к.

Отметим 5 точек на плоскости.

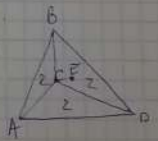
1сл)



2сл)



Всего может быть два случая: точка E внутри ABCD, и точка E вне ABCD. (если внутри более 1, то $S_{ABC} > 2 \cdot 3 > 6 > 3 \Rightarrow$ ЧТД)



1сл) E - внутри. Тогда $S_{ABCD} > 2 \cdot 4 > 8 = S_{ABD} + S_{BCD}$ $\Rightarrow$

если S_{ABD} и $S_{BCD} < 3$, то

$S_{ABCD} < 6$ -

противоречие $\Rightarrow$

площадь какого-то больше 3

ЧТД