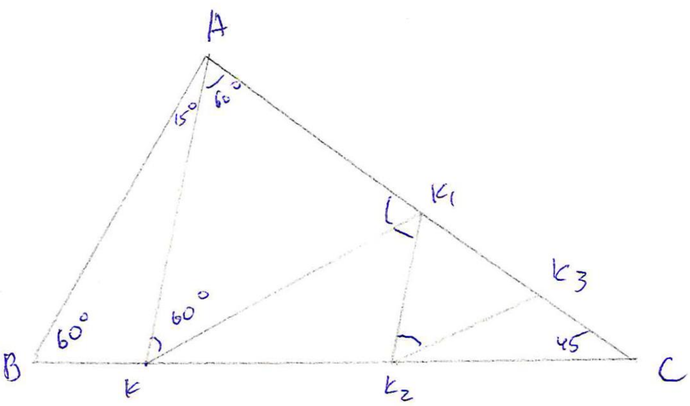
№1



Дано: $\angle B = 60^\circ$
$\angle C = 45^\circ$
$AB = 5м$

Решение

т.к $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = 5м$ => по теореме sin в $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

1 AK - направление первого полета мухи (до поворота)

$\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

пусть муха выбрала такой путь, что изначально $\angle BAK = 15^\circ$ =>

$\angle KAC = 60^\circ$ => AK_1 - направление полета мухи после первого поворота =>

$\angle AK_1K = 60^\circ$ => $\triangle AKK_1$ - равносторонний

заметим, что $AK \parallel K_1K_2 \parallel K_3K_4 \ldots \Rightarrow \triangle AKK_1 \sim \triangle K_1K_2K_3 \sim \triangle K_3K_4K_5 \ldots$ т.к

$KK_1 \parallel K_2K_3 \parallel K_4K_5 \ldots \Rightarrow \triangle AKK_1, K_1K_2K_3, K_3K_4K_5 \ldots$ - равносторонние =>

$$AK + KK_1 + K_1K_2 + K_2K_3 + \ldots = 2(AK_1 + K_1K_3 + K_3K_5 + \ldots) = AC \cdot 2 = 5\sqrt{6}$$

заметим что $5\sqrt{6} > 12$ т.к $(5\sqrt{6})^2 = 150$, $12^2 = 144 \Rightarrow (5\sqrt{6})^2 > 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\sqrt{6} > 12$

=> такое могло быть

Ответ: Да, могло.

N2

$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1+x_2) \Rightarrow 2\bar{x}_2 = x_1 + x_2$ (т.к $\bar{x}_2 < x_2$) $\Rightarrow x_1 < \bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_1 < \bar{x}_2$

$\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \Rightarrow 3\bar{x}_3 = 2\bar{x}_2 + x_3$ (т.к $\bar{x}_3 < x_3$) $\Rightarrow \bar{x}_2 < \bar{x}_3 \Rightarrow$

аналогично до $k=6 \Rightarrow \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4 < \bar{x}_5 < \bar{x}_6 \Rightarrow \bar{x}_6$ - наибольшее

$\bar{x}_7 = \frac{1}{7}(x_1+x_2+\ldots+x_7) \Rightarrow 7\bar{x}_7 = 6\bar{x}_6 + x_7$ (т.к $x_7 < \bar{x}_7$) $\Rightarrow 6\bar{x}_6 > 6\bar{x}_7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}_6 > \bar{x}_7 \Rightarrow$ аналогично до $k=12 \Rightarrow$

$\bar{x}_6 > \bar{x}_7 > \bar{x}_8 > \bar{x}_9 > \bar{x}_{10} > \bar{x}_{11} > \bar{x}_{12} \Rightarrow \bar{x}_6$ - наибольшее

Следовательно, в 6 месяце было наибольшее производство товара

Ответ: 6

N5

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 & (1) \\ yz + 3y = z + 39 & (2) \\ zx + 3x = 2z + 438 & (3) \end{cases}$$

из (1) следует что $y = \frac{x+106}{x-2}$ ($x \neq 2$ т.к $x=2$ - не корень)

из (2) следует что $y = \frac{z+39}{z+3}$ ($z \neq -3$ т.к $z=-3$ - не корень)

$\Rightarrow \frac{x+106}{x-2} = \frac{z+39}{z+3} \Rightarrow \cancel{xz} + 106z + 3x + 318 = \cancel{xz} + 39x - 2z - 78 \Rightarrow$

$\Rightarrow 108z - 36x + 396 = 0$

$3z - x + 11 = 0 \Rightarrow x = 3z + 11$ (4)

подставим (4) в (3):

$3z^2 + 11z + 9z + 33 = 2z + 438 \Rightarrow$

$3z^2 + 18z - 405 = 0$

$z^2 + 6z - 135 = 0$

$D = 36 + 540 = 576 = 24^2$

$z_{1,2} = \frac{-6 \pm 24}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -15 \\ z_2 = 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{24}{-12} = -2 \\ y = \frac{48}{12} = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -34 \\ x = 38 \end{array}\right.$

Ответ: $x = 38$; $y = 4$; $z = 9$ и $x = -34$; $y = -2$; $z = -15$.

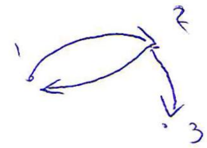
N3

т.к среди N детей каждый подарил разное число подарков, то заметим что никто не мог подарить ровно N или более подарков $\Rightarrow$ они все дарили от 0 до N-1 подарков $\Rightarrow$ всего было подарено $\frac{(N-1)N}{2}$ подарков $\Rightarrow$ столько же подарков было получено, и так как каждый получил одинаково число подарков $\Rightarrow$ каждый получил по $\frac{N-1}{2}$

=> т.к. $\frac{N-1}{2}$ - натуральное то N - нечётное >1

Доказательство: (ребро направленное от a к b означает что a дарит b подарок)

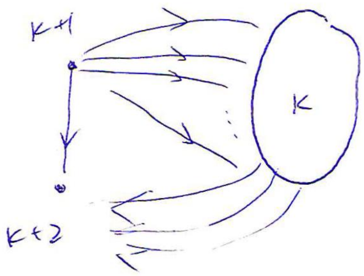
База: $N = 3$



=> все получили по 1 подарку,
первый подарил 1 подарок
второй подарил 2 подарка
третий не дарил подарков
} верно

Пусть при $N = k$ - верно

Переход: $k \to k+2$



Пусть ребёнок из группы $k+1$ подарит по подарку каждому ребёнку => всего $k+1$ подарок
разделим группу из k детей на группы из $\frac{k-1}{2}$ и $\frac{k+1}{2}$ детей: $\frac{k-1}{2}$ детей - группа(1), $\frac{k+1}{2}$ детей - группа (2)
=> пусть дети из группы (2) подарят подарок ребёнку $k+1$, а дети из группы (1) подарят подарок ребёнку $k+2$

По индукционному предположению каждый ребёнок из (k) получил ровно $\frac{k-1}{2}$ подарков => после перехода индукции они получат по $\frac{k+1}{2}$ подарков
ребёнок $k+1$ получил $\frac{k+1}{2}$ подарков, а ребёнок $k+2$ - получил $\frac{k-1}{2}+1=\frac{k+1}{2}$
=> все дети получили одинаковое число подарков.
все дети из (k) по предположению индукции дарили от 0 до $k-1$ подарков => после перехода они стали дарить от 1 до k подарков
$k+1$ ребёнок подарил $k+1$ подарок, а $k+2$ ребёнок не дарил подарков вообще => все дети подарили разное число подарков => переход выполнен.

Ответ: все нечётные больше 1