

Шифр

M-052

1	2	3	4	5	Итого

N5

$$xy - 2y = x + 106$$

$$y(x-2) = x-2 + 108$$

$$(y-1)(x-2) = 108$$

$\uparrow$ м.н. $x-2$, м.н. $0 \neq 108$

$$y = \frac{108}{x-2} + 1$$

$$zx + 3x = 2z + 438$$

$$x(z+3) = 2z + 6 + 432$$

$$(x-2)(z+3) = 432$$

$\uparrow$ м.н. $x-2 \neq 0$, м.н. $432 \neq 0$

$$z = \frac{432}{x-2} - 3$$

$$\text{Пусть } \frac{1}{a} = (x-2) \neq 0 \quad (a \neq 0) \quad \text{тогда}$$

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 \\ yz + 3y = z + 39 \\ zx + 3x = 2z + 438 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{108}{a} + 1 \\ z = 432a - 3 \\ yz + 3y = z + 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 432a + 4 \\ z = 432a - 3 \\ yz + 3y = z + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 \\ yz + 3y = z + 39 \\ zx + 3x = 2z + 438 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{108}{a} + 1 \\ z = 432a - 3 \\ yz + 3y = z + 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 432a + 4 \\ z = 432a - 3 \\ yz + 3y = z + 39 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 4y - 7 \Rightarrow y(4y - 7) + 3y = 4y - 7 + 39 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 7y - y = 32 \Leftrightarrow 4y^2 - 8y = 32 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 9 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$1) y = 4 \Rightarrow z = 16 - 7 = 9$$

целые x $4x - 8 = x + 106$ $3x = 114$ $x = 38$

Оно (очевидно, 3-ка положительна)

$$2) y = -2 \Rightarrow z = -15$$

целые x $-2x + 4 = x + 106$ $-3x = 102$ $x = -34$

Очевидно, тройка отрицательна

$$\text{Ответ: } (x, y, z) : (-34, -2, -15) (38, 4, 9)$$

N 2

$$\bar{x}_{k+1} < x_{k+1}$$

$$\frac{k\bar{x}_k + x_{k+1}}{k+1} < x_{k+1}$$

$$k\bar{x}_k < k(x_{k+1})$$

$$\bar{x}_k < x_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$(k+1)\bar{x}_k < x_{k+1} + k\bar{x}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_k < \frac{x_{k+1} + k\bar{x}_k}{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_k < \bar{x}_{k+1}$$

аналогично

$$\bar{x}_{k+1} > x_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_k > x_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_k > \bar{x}_{k+1}$$

и тогда получается, что

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4 < \bar{x}_5 < \bar{x}_6 > \bar{x}_7 > \bar{x}_8 > \bar{x}_9 > \bar{x}_{10} > \bar{x}_{11} > \bar{x}_{12}$$

$\Rightarrow \bar{x}_6$ - макс.

Ответ: 6 месяцев

N3

Максимальное к-во подаренных (или) полученных вещей равно $N-1$, а минимальное 0 $\Rightarrow$ всего различных чисел N и т.к. всего людей N , то есть по 1 человеку подарит 0, подарит 1 и т.д. до $N-1 \Rightarrow$ всего всего сделано $0+1+2+\dots+N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$ подарков $\Rightarrow$ каждый получил $\frac{N-1}{2}$, но т.к.

каждый должен был получить целое к-во подарков, то $N-1:2 \Rightarrow \Rightarrow N-1 \div 2 \Rightarrow \{N=2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ (т.к. $N > 1$)

Пример для всех $N=2k+1, k \in \mathbb{N}$

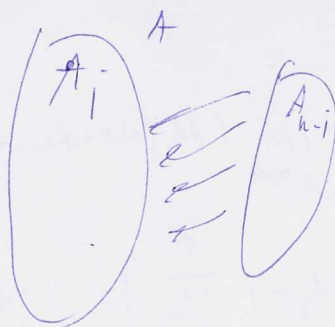
Пусть человек, подаривший i подарков, зовётся A_i

Позовём их на паре (всех кроме A_0)

$A_1 \Rightarrow A_{n-1}, A_2 A_{n-2}, \dots, A_i A_{n-i}, \dots, A_k A_{k+1}$

Возьмём любую пару и разовьём множество $(A_i A_{n-i})$

всех вершин на 2



группы $(A \cap B)$, так, чтобы

$$A_i \in A, A_{n-i} \in B$$

$$|A| = n-i, |B| = i$$

$$A_i \cap A_{n-i} = \emptyset \text{ т.к. очевидно}$$

так можем сделать, т.к.

$$i + n-i = n \text{ и } i, n-i \geq 1$$

$$(A_i \neq A_{n-i})$$

Теперь пусть A_{n-i} подарит все людям из A , а A_i все из B тогда каждый получит по 1 подарку, и т.к. всего у нас n пар, то в итоге у каждого будет по n подарков $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пример показывает, что т.д. $\Rightarrow$ показывают все целые $N > 1$ (т.к. в условии $N > 1$)

✓1

Да пусть, для начала пронумеруем все вершины от

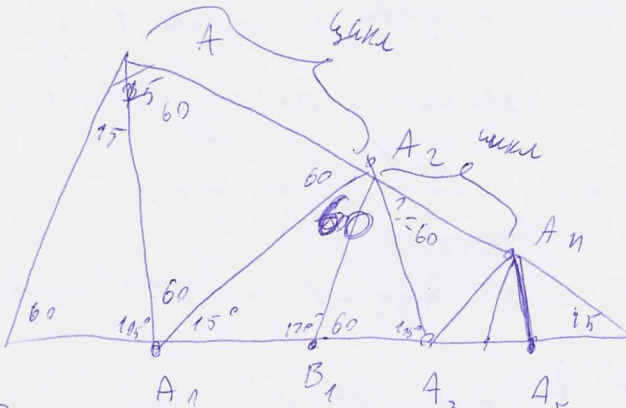
A_1 до A_i и далее

обозначим через $S_i =$

$$= AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 \dots A_{i-1}A_i$$

теперь выберем направление

вспомог (с $\angle A A_1 = 60^\circ$) $\Rightarrow$



В (с $A_2 B_1$ построим по-прежнему как и с B_1 и является золотым сечением)

$$\Rightarrow AA_1 = A_1A_2 = AA_2 \Rightarrow S_2 = 2AA_2 \text{ и из-за}$$

циклическости картинки

$$S_{2i} = 2AA_2 + 2A_2A_4 \dots + 2A_{2i-2}A_{2i} =$$

$$= 2AA_{2i}$$

$$\text{Заметим, что } \frac{A_{2i}A_{2i}}{A_{2i-2}A_{2i-4}} = \frac{A_{2i-2}A_{2i-4}}{A_{2i-4}A_{2i-6}} = \frac{A_nA_2}{A_2A} /$$

определим, а

$$\frac{A_nA_2}{A_2A} = \frac{CA_2}{CA} = \text{из-за подобия } \triangle CA_2B_1 \text{ и } \triangle CAB$$

$$(\text{а точнее золотом сечении}) \quad \frac{CA_2}{CA} < 1$$

$$\text{Итак } \lim_{i \rightarrow \infty} S_{2i} = 2 \lim_{i \rightarrow \infty} (AA_2 + A_2A_4 + \dots + A_{2i-2}A_{2i}) = 2 \lim_{i \rightarrow \infty} (AA_2(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^i)) =$$

$$= 2AA_2 \cdot \frac{1}{1-\alpha} = 2AA_2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{CA_2}{CA}} \right) = 2AA_2 \cdot \left(\frac{1}{\frac{AA_2}{CA}} \right) = 2CA$$

и т.к. $2CA > 12^*$, то $\exists i$ при котором $S_{2i} > 12$, т.е. г.

$$* \text{ Д-м это имеем, что } \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}, \text{ т.е. } \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{AC}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = AB \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AC = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2CA = 5\sqrt{6} \text{ и т.к.}$$

$$25 \cdot 6 = 150 > 144 = 12^2, \text{ то } 2CA > 12, \text{ т.е. г.}$$

N4

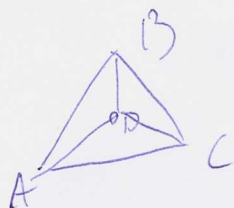
Заметим, что никакие 3 не на одной прямой, иначе $\exists \perp$ с площадью 0.

Предположим таких точек нет (то площадь ≥ 3)

Рассмотрим их выпуклую оболочку.

Несколько случаев

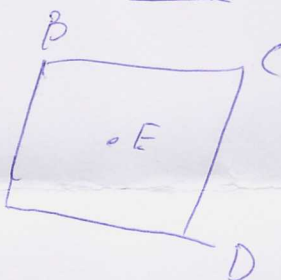
1) она 



тогда D, где-то внутри и

$$S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC} + S_{CDB} \geq 2+2+2 > 3, \text{ } \times^0$$

2) она 



тогда она (E) где-то внутри

$$\text{и } S_{ABCD} = S_{AEB} + S_{BEC} + S_{CED} + S_{DEA} \geq 8$$

и

$$\text{и } S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{либо } S_{ABD}, \text{ либо } S_{BDC} \geq 4 > 3, \text{ } \times^0$$

3) она 

