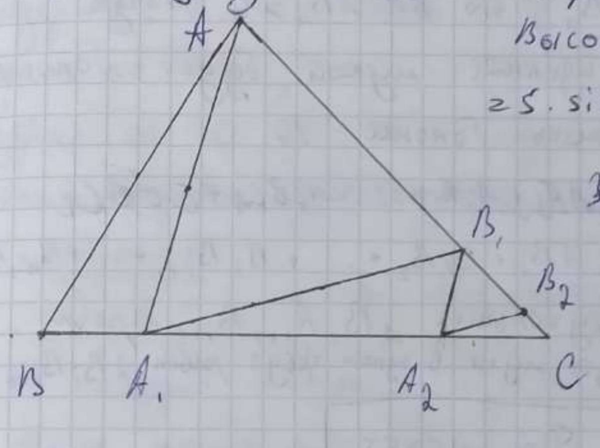
№1

Возьмём случай, когда муха вылетает под углом 60° к стороне AC.



Высота $\triangle ABC$ $AH =$
$= 5 \cdot \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Обозначим точки столкновения мухи со стороной BC $A_1, A_2, A_3 \ldots$ (в порядке увеличения времени). Таким же образом обозначим точки столкновения мухи со стороной AC: $B_1, B_2 \ldots$. Длина AC равна $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ (из $\triangle AHC$)

Заметим, что $\frac{5\sqrt{6}}{2} > 6$, т.к. $\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 > 6^2$.

Заметим, что $\triangle AB_1A_1$ – равносторонний.

Муха будет бесконечно приближаться к т. C.

Тогда и для любого i верно: $B_iA_{i+1} = A_{i+1}B_{i+1} =$

$= B_i B_{i+1}$. Благодаря тому, что муха сколь угодно близко подлетает к вершине C, найдем такую точку B_n, что ~~AA~~ $AB_n > 6$. Тогда расстояние пройденное мухой будет больше $2AB_n$, то есть больше 12

(~~т.к. [illegible]~~

(т.к. $AB_n = AB_1 + B_1B_2 + \dots + B_iB_{i+1} + \dots + B_{n-1}B_n$)

(Ведь любой треугольник $\triangle B_i A_{i+1} B_{i+1}$ — равносторонний => путь мухи в одном треуг. равен $2B_iB_{i+1}$)

$\boxed{\text{Ответ: Да, может.}}$

№2

Заметим, что производство товара с января по июнь ~~[illegible]~~ за месяц росло. Действительно, если $\overline{x_k} < x_k$ при $k \in [2,6]$, то ~~[illegible]~~ $x_k > x_{k-1}$, ибо $\overline{x_k}$ — среднее арифметическое. Тогда производство товара за месяц с июля по декабрь уменьшалось. А следовательно наибольшее кол-во товара было произведено в июне. $\boxed{\text{Ответ: в июне}}$

№3

Т.к. все подарили разное кол-во подарков, а сам ~~[illegible]~~ себе подарок подарить не мог, то каждый ребенок подарил от 0 до $N-1$ подарка. Суммарно они ~~[illegible]~~ подарили друг другу: $0 + 1 + \dots + N-1 + N-1 = \frac{(N-1)\cdot N}{2}$. Т.к. все получили поровну, то каждый получил $\frac{N-1}{2}$ подарка. Значит, N — не может быть чётным. Покажем, что при любом ~~N~~ нечетном N это возможно.

Первая группа из $\frac{N-1}{2}$ детей будут по очереди дарить подарки всем тем, кто подарки пока не дарил. То есть, 1-ый подарит всем, 2-ой всем, кроме первого, $\frac{N-1}{2}$-ый подарит всем, кроме первой группы детей.

Вторая группа людей подарят подарки таким образом: $N-1$-ый подарит первому, $N-2$-ой подарит первому и второму, $\frac{N+1}{2}$-ый подарит всем из первой группы. N-ый не подарит ничего. Тогда k-ый ребёнок из второй группы подарит $N-k$ подарков: каждому, начиная от первого до $N-k$-ого. Тогда все получат поровну подарков, а ~~полу~~ подарят разное.

Действительно, i-ый ребёнок получит:

~~[illegible]~~ =

$$\underbrace{i-1}_{\text{подарит 1-ая группа}} + \underbrace{\left((N-i)-\left(\frac{N+1}{2}\right)\right)}_{\text{подарит 2-я группа}} = \frac{N-1}{2}$$ - если он из первой группы.

$$\frac{N-1}{2}+0=\frac{N-1}{2}$$ - если он из второй.

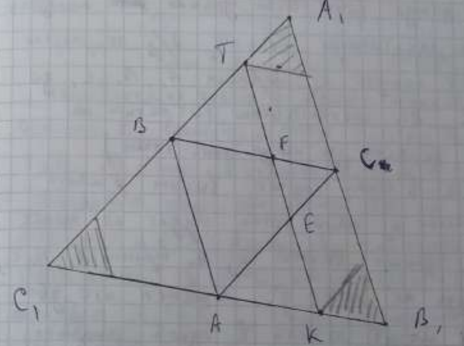
Получат ~~#~~ поровну

$\boxed{\text{Ответ: для нечетных } N.}$

~~№3~~

№4

Построим треугольник ABC с наибольшей площадью, меньшей 3. Построим $\triangle A_1B_1C_1$ так, что ~~Вг-середина~~ A, B, C - середины сторон B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно.



Заметим, что остальные две точки (помимо A, B, C) могут находиться в пределах ~~A_1B_1~~ треугольника $A_1B_1C_1$, иначе площадь треугольника, ~~будет больше (т.к. высота будет больше~~ образованного новой точкой и двумя точками из A, B, C, будет больше (т.к. будет больше высота, проведенная из новой точки к основанию). Также заметим, что эти две точки не могут быть слишком близко к ABC, т.к. площадь треугольника должна быть не менее 2.

Тогда каждая новая точка должна ~~нах~~ находиться на расстоянии больше 2/3 от расстояния от каждой из вершин A_1, B_1, C_1 до BC, AC, AB соответственно. (Отметим на рисунке области, где могут быть точки.)

2/3 - т.к. в таком случае высота ~~в~~ нового треугольника из новой точки будет не менее 2/3 от длины высоты из ~~A~~ вершин A_1, B_1, C_1, и площадь не менее 2. Докажем, что две точки не могут лежать в одной заштрихованной области. Действительно, если рассмотреть две точки M и N ~~в~~ внутри области с вершиной A_1 ~~$\frac{1}{4}$~~ (это можно сделать не умаляя общности), то S_{MNC} будет меньше

или равен S_{A_1TC} ведь $\triangle MNC$ лежит полностью в $\triangle A_1TC$. (где T - вершина области, $T \in A_1B$),

$S_{A_1TC} \leq \frac{1}{3} S_{ABC}$ (т.к. $S_{A_1CB} = S_{ABC}$, $S_{TBC} = \frac{2}{3} S_{ABC}$ т.к. $h_T = \frac{2}{3} h_{A_1}$) h_T - высота из точки T на ~~AB~~ BC, h_{A_1} - высота из A_1 на BC. => $S_{MNC} \leq S_{TCA_1} \leq \frac{1}{3} S_{ABC} < 1$

Причём, $S_{MNC} = S_{TCA_1}$, если $M = T$ и $N = A_1$.

Следовательно, точки в разных областях. Отметим K - вершину области B_1, $K \in B_1A$. Пусть M лежит в области A_1, N в области B_1.

Обозначим точки пересечения TK со сторонами ABC — F и E. Пусть S_M - площадь участка треугольника ~~$\triangle$~~ MNC, попадающего в параллелограм A_1TEC, S_N - аналогично для параллелограмма FCB_1K. Очевидно, что $S_{MNC} \leq S_M + S_N$, однако заметим, что $S_M \leq 0{,}5\, S_{A_1TEC}$ и $S_N \leq 0{,}5\, S_{FCA_1K}$ (ибо диагонали TC и CK делят параллелограммы пополам) => $S_{MNC} \leq 0{,}5\, S_{A_1TKB_1} = \frac{11}{2 \cdot 9} S_{ABC} \leq \frac{2}{3} S_{ABC} < 2$ Противоречие. Значит, нельзя расставить пять точек так, чтобы площади всех треугольников были ~~бы~~ площади не менее 2 и ~~не~~ менее трех. Какой-то обязательно будет не меньше 3

$S_{A_1TKB} = \cancel{S_{S_1TK}}$ [illegible] $=$

$= \cancel{[illegible]} = S_{A_1TEC} + S_{FCB_1K} =$

$= h \cdot TE + \frac{5}{9} S_{ABC} = \{$ где h - высота из C на FE; $h = \frac{1}{3} h_c$, где h_c - высота из C на AB, тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot AB = \frac{3h \cdot AB}{2} \} =$

$= \frac{2 S_{ABC}}{3AB} \cdot TE + \frac{5}{9} S_{ABC} = \frac{11}{9} S_{ABC}.$

(это выражаем S_{A_1TKB} через S_{ABC})

№ 5 Выразим из (1) $x = \frac{2y+106}{y-1}$,

из (3) $x = \frac{2z+438}{z+3}$. Приравняем,

$\frac{2y+106}{y-1} = \frac{2z+438}{z+3} \Rightarrow (z+3)(2y+106) = (2z+438) \cdot (y-1)$

$\Rightarrow 432y - 108z - 756 = 0 \Leftrightarrow z = 4y - 7$

Подставим во 2-ое

$y \cdot (4y-7) + 3y = 4y - 7 + 39$

$4y^2 - 7y + 3y - 4y + 7 - 39 = 0$

$4y^2 - 8y - 32 = 0 \Rightarrow y = 4, -2$

при $y = 4$ находим $z = 9$ $x = 38$

при $y = -2$ находим $z = -15$, $x = -34$

$\boxed{\text{Ответ: } (-34; -2; -15); (38; 4; 9)}$