№1

Пусть a – ускорение

$v_0 = 90 \frac{км}{ч}$ – начальная скорость

$v_к = 110 \frac{км}{ч}$ – конечная скорость

$t_1 = 2ч$

$t_2 = 3ч$

тогда, т.к движение равноускоренное, то $v_к = v_0 + a(t_1 + t_2) \Rightarrow$

$$a = \frac{v_к - v_0}{t_1 + t_2} = \frac{20}{5} = 4 \frac{км}{ч^2}$$

Пусть в пункте B у него была скорость v_B, тогда

$v_B = v_0 + at_2 = 90 + 12 = 102 \Rightarrow$ путь от C до B $S_{CB} = v_2 t_1 + \frac{at_1^2}{2} =$

$= 204 + 8 = 212$, также путь между A и B $S_{AB} = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} = 270 + 18 =$

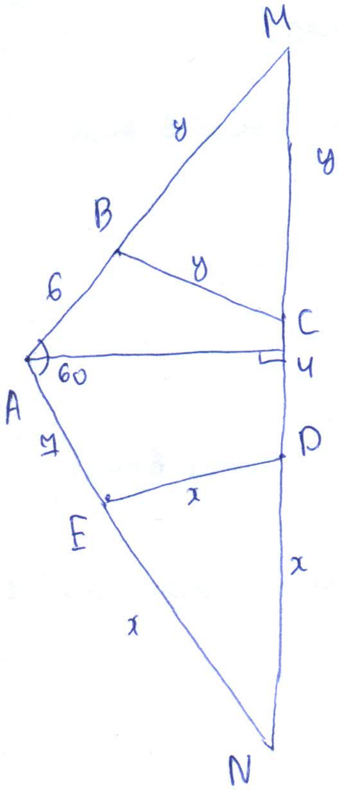
$= 288 \Rightarrow S_{AC} = S_{AB} - S_{CB} = 288 - 212 = 76$

Ответ: $S_{AC} = 76$ км.

№2

Продлим AB и CD до пересечения, AE и CD до пересечения

M – точка пересечения AB и CD, N – точка пересечения AE и CD



т.к $\angle A = 60$, а по условию $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$ и $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$ $= 540$ – сумма углов в пятиугольнике, то $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \frac{540-60}{4} =$ $= \frac{480}{4} = 120$, по свойству смежных углов $\angle MBC = 180 - 120 = 60$

$\angle BCM = 180 - 120 = 60$, и $\angle BMC = 180 - 60 - 60 = 60$ т.к сумма углов в $\Delta = 180 \Rightarrow \Delta BMC$ – равносторонний.

по свойству смежных углов $\angle EDN = 180 - 120 = 60$, $\angle NED = 180 - 120 = 60$ и $\angle DNE = 180 - 60 - 60 = 60$, т.к сумма углов в $\Delta = 180 \Rightarrow \Delta EDN$ – равносторонний

т.к $\angle M = 60$ и $\angle N = 60$, то ΔAMN – равносторонний и AH – медиана, биссектриса и высота.

Пусть $ED = DN = EN = x$, $BM = MC = BC = y$

$6 + y = 7 + x = 4 + x + y$ $\begin{cases} 6 + y = 7 + x \\ 6 + y = 4 + x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 6 + x + 1 = 4 + x + x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

в прямоугольном ΔMAH $MA = 6 + y = 9$ и $MH = \frac{1}{2}MN = 4{,}5$

$\Rightarrow AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{81 - 20{,}25} = \sqrt{60{,}75} = 4{,}5\sqrt{3}$

Ответ: $AH = 4{,}5\sqrt{3}$

№3

$a, b > 0$

$$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} > (a^{2019}+b^{2019})^{2018}$$

Будем считать, что $a \geqslant b$ для определенности. Это можно делать, т.к неравенство симметрично, если заменить a на b и b на a ничего не изменится.

Разделим обе части на $b^{2018\cdot 2019} > 0$:

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2018}+1\right)^{2019} > \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2019}+1\right)^{2018}$$

заменим $x=\frac{a}{b} \geqslant 1$, т.к $a \geqslant b$, имеем:

$$(x^{2018}+1)^{2019} > (x^{2019}+1)^{2018}$$

по биному Ньютона $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$ имеем:

$$\sum_{k=0}^{2019} C_{2019}^k x^{2018(2019-k)} > \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^{2019(2018-k)} \quad (*)$$

1) Очевидно, что $C_{2019}^0 = C_{2018}^0$ и $C_{2019}^k = C_{2018}^{k-1} + C_{2018}^k > C_{2018}^k \quad \forall k \in [1;2018]$

и 2) $x^{2018(2019-k)} > x^{2019(2018-k)}$ это тоже верно, т.к $x^{2018\cdot 2019-2018k} > x^{2019\cdot 2018-2019k}$ $\forall k \in [1;2018]$ (при $k=0$ они равны), действительно,

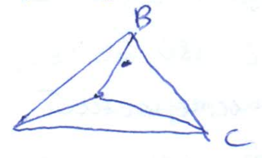
$$\frac{x^{2018\cdot 2019-2018k}}{x^{2019\cdot 2018-2019k}} = x^{(2019-2018)k} = x^k > 1$$

Из 1) и 2) следует, что $(*)$ верно $\Rightarrow$ верно и исходное неравенство.

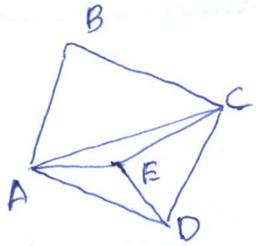
№4

Т.к на плоскости отмечены 5 точек, любые 3 из которых образуют треугольники $\Rightarrow$ никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Рассмотрим 3 случая!

1) Все эти 5 точек лежат в наименьшем выпуклом множестве точек в виде треугольника ABC, тогда $S_{ABC} \geq 2\cdot 3 = 6$

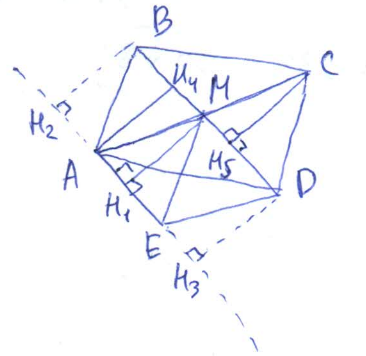


2) Все эти 5 точек лежат в наименьшем выпуклом множестве точек в виде четырехугольника $ABCD$, т.е пятая точка E лежит внутри него.



Пусть E лежит в $\triangle ACD$ поэтому $S_{ACD} \geq S_{EAD} + S_{ECD} \geq 4$
аналогично, если E лежит в $\triangle BCA$

3) Все эти 5 точек лежат в наименьшем выпуклом множестве точек в виде пятиугольника $ABCDE$



т.к MH_1 лежит правее BH_2 и левее DH_3, то

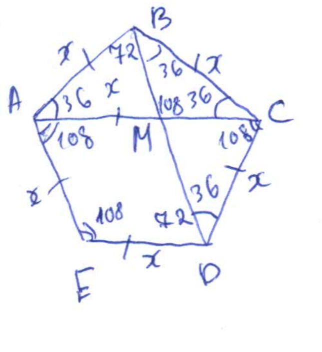
$S_{ABM} < S_{AME} < S_{ADE} \Rightarrow S_{AME} \geq 2$

1) $\frac{S_{BAD}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2}AH_4\cdot BD}{\frac{1}{2}CH_5\cdot BD} = \frac{AH_4}{CH_5} = \frac{AM}{MC}$, т.к $\triangle AH_4M \sim \triangle MCH_5$

поэтому $S_{BAD} \geq S_{BCD}\cdot\frac{AM}{MC} = 2\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{5}+1 > 3$

const посчитаем для правильного пятиугольника тоже, там очевидно будет достигаться max этой константы

2) Посчитаем const:



$\frac{MC}{\sin 36} = \frac{x}{\sin 108}$ по т. синусов из $\triangle MBC \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{x\cdot\sin 108}{x\cdot\sin 36} = \frac{\sin 108}{\sin 36} =$

$= \frac{\cos 18}{2\sin 18\cos 18} = \frac{1}{2\sin 18}$; $4\sin^2 18 = \frac{2\sin 18\sin 36}{\cos 18} = \frac{\cos 18 - \cos 54}{\cos 18} =$

$= 1 - \frac{\sin 36}{\cos 18} = 1 - 2\sin 18$, откуда $4\sin^2 18 + 2\sin 18 - 1 = 0$

$4t^2 + 2t - 1 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 4 = 20 \Rightarrow t_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{8} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $t_2 = \frac{-2-\sqrt{20}}{8}$ – не подходит

Итак $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2\sin 18} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{2\cdot 4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

№5

$n^3+13n-273=k^3 \qquad n,k\in\mathbb{N}$

$13(n-21)=k^3-n^3=(k-n)(k^2+kn+n^2)$ (*)

Рассмотрим 3 случая:

1) $k=n \Rightarrow n=21$ – подходит

2) $k<n \Rightarrow k\le n-1 \Rightarrow k^3-n^3\le (n-1)^3-n^3 = n^3-3n^2+3n-1-n^3=-3n^2+3n-1$

поэтому из (*):

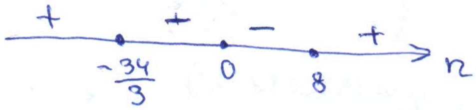
$13(n-21)\le -3n^2+3n-1$

$13n-273\le -3n^2+3n-1$

$3n^2+10n-272\le 0$

$D=100+4\cdot3\cdot272=3364$

$n_{1,2}=\dfrac{-10\pm58}{6}=8;\ -\dfrac{34}{3}$



итак $n\in[0;8]$, но если $n\le5$, то $n^3+13n-273<5^3+13\cdot5-273=-83 \Rightarrow n\le5$ не подходит

Если $n=6$, то $k^3=216+13\cdot6-273=21$ – нет

$n=7$, то $k^3=343+13\cdot7-273=161$ – нет

$n=8$, то $k^3=512+13\cdot8-273=343=7^3$, т.е $n=8$ – подходит

3) $k>n \Rightarrow k\ge n+1 \Rightarrow k^3-n^3\ge (n+1)^3-n^3=n^3+3n^2+3n+1-n^3=3n^2+3n+1$

поэтому из (*): $13(n-21)\ge 3n^2+3n+1$

$13n-273\ge 3n^2+3n+1$

$3n^2-10n+274\le 0$

$D=100-4\cdot3\cdot274<0 \Rightarrow$ у нер-ва нет натуральных решений

Итак, подходят $n=8$ и $n=21$, т.е. ответ: $8+21=29$