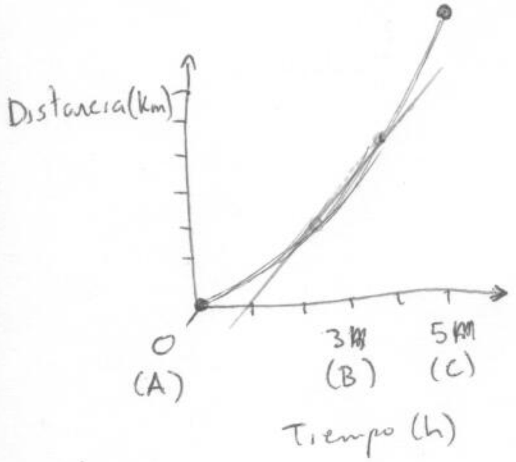
# Problema 1

~~Consideremos la gráfica en el plano que, para un determinado tiempo (en horas)~~

Como, por hipótesis, la aceleración del motociclista es constante, y usando los datos del problema, podemos ver que su tasa de incremento de velocidad (aceleración) es igual a $\dfrac{110^{km/h} - 90^{km/h}}{5h} = 4^{km/h^2}$. (El tiempo igual a 5h sale de que Tiempo de A a C = Tiempo de A a B + Tiempo de B a C).

Ahora, consideremos la gráfica en el plano que relaciona el tiempo de recorrido en horas con la distancia recorrida en kilómetros, ambos desde A. (Sea $f(x)$ la función que nos da esa gráfica)




Veamos que, para cualesquiera 2 puntos en la gráfica, la pendiente de la recta que los une será igual a la velocidad promedio durante esa parte del trayecto. Luego, la velocidad en un instante determinado será igual a la pendiente de la tangente a esa curva en el punto que se tiene. Esto será igual al valor de la derivada de $f(x)$ cuando $x=t$ es el tiempo que se ha determinado.

Como la velocidad aumenta siempre al mismo ritmo, entonces la función derivada $f'(x)$ será una función lineal de la forma $f'(x) = mx + b$.

Para obtener $b$, basta ver que cuando $x=0$ (en A), la velocidad es $90^{km/h}$ por hipótesis. Sustituyendo se tendrá que $90 = f'(x) = 0m + b = b$.

$m$ es justamente la tasa de incremento de la velocidad, y por lo que obtuvimos al inicio, se tendrá que $m=4$.

Luego, $f'(x) = 4x + 90$. Con esto, notemos que $f(x)$ será el resultado de integrar $f'(x)$, por lo que $y = f(x) = 2x^2 + 90x + c$, con $c$ constante.

Es fácil ver que $c=0$ pues cuando $x=0$ (en A), $y=0$ (no se ha recorrido distancia alguna).

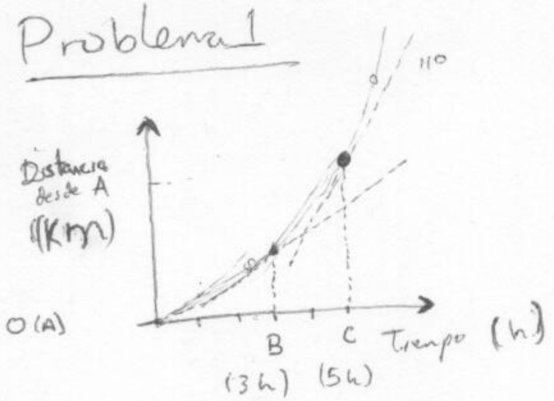
Luego, $f(x) = 2x^2 + 90x$.

Como el motociclista hizo 5 horas de camino para llegar de A a C, basta sustituir $x=5$ en $f(x)$ para ver que la distancia entre esos 2 puntos es igual a

$2 \cdot 25 + 90 \cdot 5 = 500$ km, y terminamos ■

Problema 1

(Borrador 1/1)

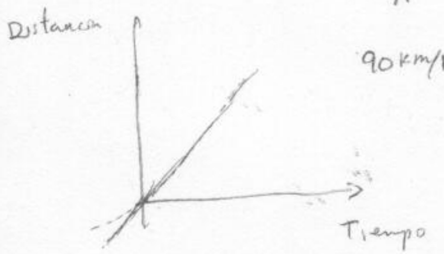



$$\frac{D_C}{5h} = 110 km/h$$

$D_C = 550$ km

$$\frac{D_B}{3h} = 102\ km/h$$

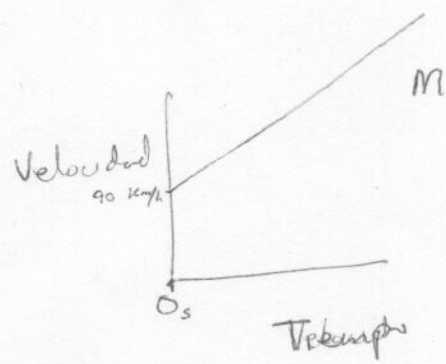
$D_B = 306$ km


90km/h

$$\frac{110\ km/h - 90\ km/h}{5h} = 4\ km/h^2$$

Tasa de incremento de velocidad




$m_t\ km/h = at + c$

$c = 90\ km/h$

$a = 4\ km/h^2$

~~$\frac{110\ km/h - V_B}{3h} = 4\ km/h^2$~~

$$\frac{V_B - 90\ km/h}{3h} = 4\ km/h^2$$

t es un número en horas

$t' = \frac{t}{h}$

$V_B = 102\ km/h$

$m_t\ km/h = 4t\ km/h^2 + 90\ km/h$

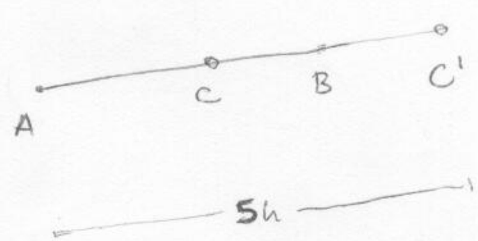
$m_t = 4t' + 90$

$m_3 = a \cdot 3h$

$102\ km/h = a \cdot 3h$

a=

La velocidad aumenta de manera lineal




A

90 km/h

V

$M_{0h} = 90 \rightarrow C = 90$

$m_{3h} = a \cdot 3h + 90$

$102\ km/h = a \cdot 3h + 90$

$a = 4\ km/h^2$

$m_t = at + c$

$d_t = \frac{a}{2}t^2 + c$

$m_t = 4t + 90$

$2t'^2 + 90t' + c = d$

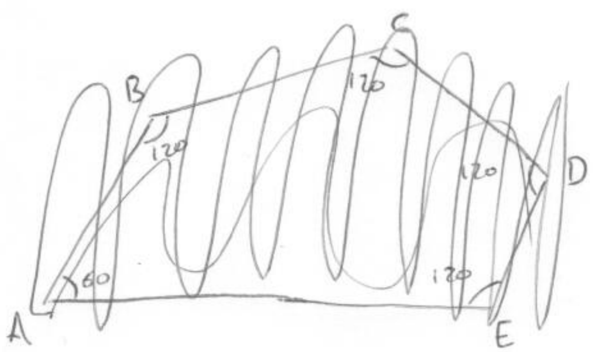
$c = 0$ pues cuando $t = 0$, $d = 0$

Luego, cuando $t' = 5$

$d = 50 + 450$

$d = 500$ km

# Problema 2

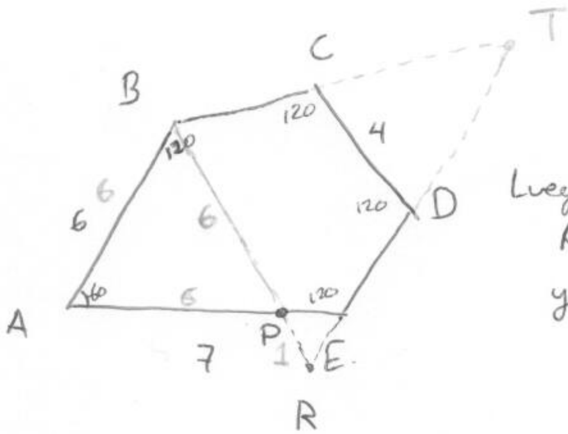



Como la suma de los ángulos internos de un pentágono es $540°$, y como $\sphericalangle A = 60°$ por hipótesis, entonces podemos ver que

$$\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = \frac{540-60}{4} = 120°$$

Ahora, consideremos la bisectriz de $\sphericalangle B$ y sea $P$ la intersección de esa línea con la recta $AE$. Luego, tendremos que $\sphericalangle ABP = \sphericalangle B/2 = 60°$.

Esto basta para ver que el triángulo $\triangle ABP$ es equilátero, pues 2 de sus ángulos son iguales a $60°$.




Luego, $AP=6$ (Como $AE=7$, entonces $P$ está sobre el segmento $AE$)

Ahora, consideremos la intersección de $BP$ con $DE$, y llamémosle $R$.

Como $\sphericalangle CDR = \frac{\sphericalangle B}{2} = 60$ y $\sphericalangle C = 120$, entonces $\sphericalangle CDR + \sphericalangle C = 180°$, con lo que $BR \parallel CD$.

También, notemos que $\sphericalangle RPE = \sphericalangle BPA = 60°$, y que $\sphericalangle PER = 180 - \sphericalangle E = 60°$.

Luego, $\triangle PER$ es equilátero. Como $AE = 7$ y $AP = 6$, entonces $PE = PR = ER = 1$.

Por ende, se tiene que $BR = BP + PR = 7$.

Sea $T$ la intersección de $BC$ con $RD$.

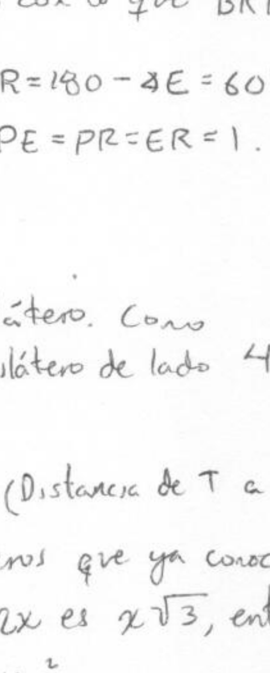
Como $\sphericalangle TBR = \sphericalangle B/2 = 60$ y $\sphericalangle TRB = 60°$, entonces $\triangle TBR$ es equilátero. Como $BR = 7$ entonces $BT = TR = 7$. También como $BR \parallel CD$, $\triangle TCD$ es equilátero de lado 4

Ahora, utilizando que $BR \parallel CD$, podemos ver que

Distancia de $A$ a $CD$ = (Distancia de $A$ a $BR$) + (Distancia de $T$ a $BR$) − (Distancia de $T$ a $CD$)

lo cual es más sencillo de obtener, pues son alturas de triángulos equiláteros que ya conocemos. Como, por pitágoras, el altura de un triángulo equilátero de lado $2x$ es $x\sqrt{3}$, entonces se tendrá que

$$x^2 + h^2 = 4x^2$$
$$h^2 = 3x^2$$
$$h = x\sqrt{3}$$



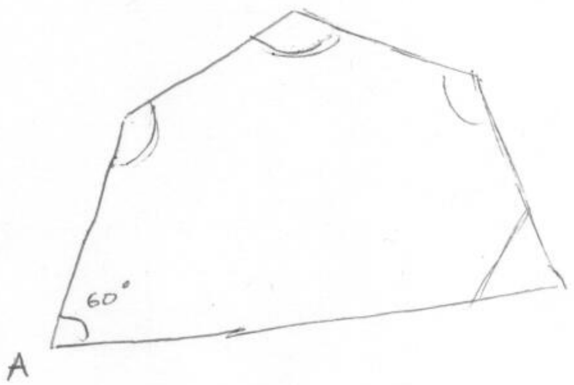

$$3\sqrt{3} + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

es la distancia entre $A$ y $CD$. Como era ese el dato que buscábamos, concluimos ∎

Borrador 1/1

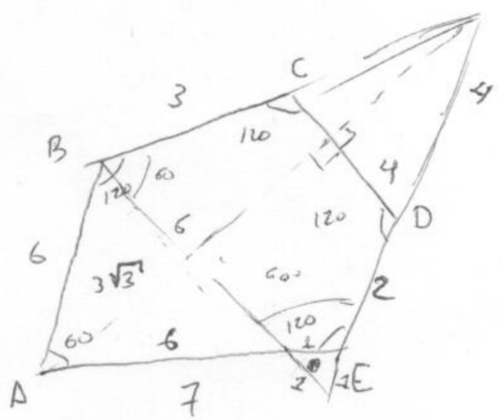
# Problema 2

$180 \cdot 3 = 540$
$\quad - 60$
$4 \overline{)480}$
$\quad 120$




$\left(\frac{7}{2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) + \left(3\sqrt{3}\right)$

$\frac{9}{2}\sqrt{3}$



# Problema 3

$$\left(a^{2018}+b^{2018}\right)^{2019} > \left(a^{2019}+b^{2019}\right)^{2018}$$

(Esto se puede hacer pues $a,b \in \mathbb{R}^+$)

$$\iff$$

$$\left(a^{2018}+b^{2018}\right)^{\frac{2019}{2018}} > a^{2019}+b^{2019}$$

Sea $f(x)=x^{\frac{2019}{2018}}$. Luego, el problema equivale a probar que

$$f\left(a^{2018}+b^{2018}\right) > f\left(a^{2018}\right)+f\left(b^{2018}\right) \quad \forall\ a,b \in \mathbb{R}^+.$$

Esto es equivalente a probar que

$$f(x+y) > f(x)+f(y) \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^+$$

(Pues basta tomar $a = x^{\frac{1}{2018}}$, $b = y^{\frac{1}{2018}}$. Los cuales son reales positivos ya que $x,y \in \mathbb{R}^+$).

Pero esto es cierto pues

$G(x) = f(x+A) - f(x)$ es creciente, de donde, tomando $A = y$

(A es una constante).

$$f(x+y) - f(x) > f(y) - f(0) = f(y) \qquad \left(f(0) = 0^{\frac{2019}{2018}} = 0\right).$$

Con lo que

$f(x+y) > f(x)+f(y)$, y terminamos ∎

~~[illegible]~~

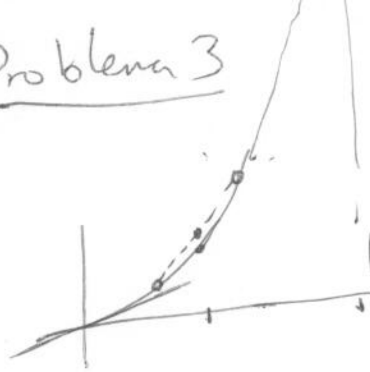
Problema 3

Borrador, 1/3

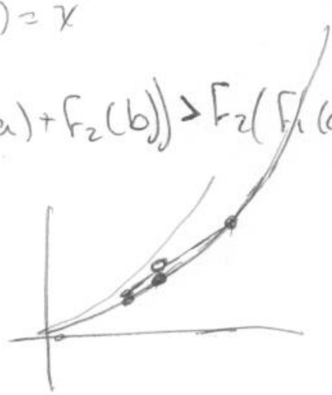
$$f_1(x) = x^{2019}$$

$$f_2(x) = x^{2018}$$

$$\binom{2019}{0} A^{2019} + \binom{2019}{1} A^{2018} B$$



$$f_1\left(f_2(a)+f_2(b)\right) > f_2\left(f_1(a)+f_1(b)\right)$$



$$a^{2018} + b^{2018} > a+b - \frac{ab^{2018} + ba^{2018}}{(a^{2018}+b^{2018})}$$

$$a^{2018} + b^{2018} > \left[a+b - ab\,\frac{a^{2017}+b^{2017}}{a^{2018}+b^{2018}}\right]^{2018}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\frac{a+b}{\;} \leq \sqrt{2a^2+2b^2}$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

$$a+b > \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{a+b}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$(a+b)^2 > (a^2+b^2)$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b \leq 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$(a^m+b^m)^{m+1} > (a^{m+1}+b^{m+1})^m$$

$a$

$$(a^m+b^m)^{\frac{m+1}{m}} > a^{m+1}+b^{m+1}$$

$$(a^2+b^2)^3 > (a^3+b^3)^2$$

$$(a^2+b^2)(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} > a^3+b^3$$

$$a\cdot a^m + b\cdot b^m$$

$$(a^m)^{\frac{m+1}{m}} + (b^m)^{\frac{m+1}{m}}$$

$$(A+B)(A+B)^{\frac{1}{2018}} > A\cdot A^{\frac{1}{2018}} + B\cdot B^{\frac{1}{2018}}$$

$$(A+B)^{\frac{1}{2018}} > A\cdot \frac{1}{\;}$$

$$(A+B)^{\frac{1}{2018}} > \frac{A}{A+B}\left(A^{\frac{1}{2018}}\right) + \frac{B}{A+B}\left(B^{\frac{1}{2018}}\right)$$

$$(x+y)^c > x^c + y^c$$

$$f(x+c) - f(x)\ a$$

Borrador 2/3

# Problem 3

$\cancel{f(x+a) - f(x)}$

$$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} > (a^{2019}+b^{2019})^{2018}$$

$F(x+a) - F(x)$ es creciente

$f(A+B) + F(B) > f(A)$

$\binom{2019}{0}(a^{2018})^{2019}$

$f(x) = x^2$

$$(a^{2018}+b^{2018})^{\frac{2019}{2018}} > a^{2019} + b^{2019}$$

$$\frac{1}{n} f(x_1) + \dots + \frac{1}{n} f(x_n) \geq f\left(\frac{1}{n}x_1 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right)$$

$c = b^{2018}$

$$\frac{\sum x_i^2}{n} \geq \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$$

$$(a^{2018}+c)^{\frac{2019}{2018}} > a^{2019} + c^{\frac{2019}{2018}}$$

Verdadero por MQ-MA

$f(x) = x^{\frac{2019}{2018}}$

Jensen: Si F es convexa, entonces
$w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n) \geq F(w_1 x_1 + \dots + w_n x_n)$
con $w_1 + \dots + w_n = 1$

$\cancel{f(a+b) > f(a) + f(b)}$

$f(a^{2018}+b^{2018}) > f(a^{2018}) + f(b^{2018})$

$\frac{1}{2} f(a^{2018}) + \frac{1}{2} f(b^{2018})$

$\frac{1}{2} f(a^{2018}) + \frac{1}{2} F(b^{2018}) \geq F\left(\frac{a^{2018}+b^{2018}}{2}\right)$

$\frac{1}{2} f(a^{2018}) + \frac{1}{2}$

$F_1(a) = a^{2018} + C$

$$(a^{2018}+b^{2018})\sqrt[2018]{a^{2018}+b^{2018}} > a^{2019} + b^{2019}$$

$F_2(a) =$

$a$

$$a^{2019} + b^{2019} = (a^{2018}+b^{2018})(a+b) - ab^{2018} - ba^{2018}$$

ssi $\sqrt[2018]{a^{2018}+b^{2018}} \geq a + b -$

$\cancel{F(A)}$

$G(A) = F(A) - A$ tambien es creciente

~~Página b/~~
Borrador 3/3

# Problema 3

~~$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} > (a^{2019}+b^{2019})^{2018}$~~

~~$A = a^{2018}$~~

~~$B = b^{2018}$~~

~~$\binom{2019}{0}A^{2019} + \binom{2019}{1}A^{2018}B + \dots + \binom{2019}{2018}AB^{2018} + \binom{2019}{2019}B^{2019} > \binom{2018}{0}(aA)^{2018}$~~

$$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} > (a^{2019}+b^{2019})^{2018}$$

* Se puede hacer por ser $a$ y $b$ positivos

$$\Longleftrightarrow$$

$$(a^{2018}+b^{2018})^{\frac{2019}{2018}} > a^{2019}+b^{2019}$$

Sea $f(x) = x^{\frac{2019}{2018}}$.

Queremos probar que

$$f(a^{2018}+b^{2018}) > f(a^{2018}) + f(b^{2018}) \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}^+$$

Lo cual, a su vez, equivale a ver que

$$f(A+B) > f(A) + f(B) \quad \forall\ A, B \in \mathbb{R}^+$$

← Si se ve esto basta tomar $a = A^{\frac{1}{2018}}$ y $b = B^{\frac{1}{2018}}$, los cuales son reales positivos al ser $A$ y $B$ reales positivos.

$$(A+B)^{\frac{2019}{2018}} > A^{\frac{2019}{2018}} + B^{\frac{2019}{2018}}$$

Lo cual es cierto pues $f(x) = x^{\frac{2019}{2018}}$ es una función creciente y convexa y cumple que $f(x) > x \ \forall x \in \mathbb{R}$, con lo que terminamos $\square$

Borrador 4

# Problema 3

$(x+c)^{2019/2018} - x^{\frac{2019}{2018}} >$

$F(x) - x$ es creciente.

$(F(x+c) - x - c) - (F(x) - x)$

$F(x+c) - F(x) - c$ es creciente

~~f~~

$F(x+A)$

$F_1(x) = F(x+c)$

$F_2(x) = F(x)$

$F_1(x)$ creciente

$F_2(x)$ creciente

$F_1(x) - F_2(x)$ creciente

$F_1(x) - F_2(x) > F_1(y) - F_2(y)$

$F_1(x) - F_1(y) > F_2(x) - F_2(y)$

$F(x) - F(y) \geq F(x) - F(y)$

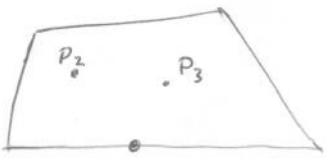
$(x+c)$

# Problema 4

Procederemos por contradicción. Supongamos que todos los triángulos tendrán área menor a 3. Primero, probaremos el siguiente lema.

Lema 1

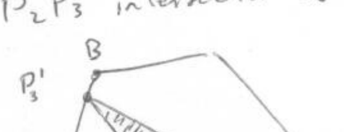
En un trapecio como en el de la figura, el área del triángulo de base la base mayor y altura igual a la distancia entre las bases, maximiza el área de cualquier triángulo formado por 1 punto en la base mayor y 2 puntos en el trapecio




**Prueba** Sea $(XYZ)$, el área del triángulo $XYZ$. Consideremos las intersecciones de la recta $P_2P_3$ con el trapecio. Aquí vemos 3 casos. No obstante, en todos se puede ver que $(P_1P_2P_3) \leq (P_1P_2'P_3')$

i) $P_2P_3$ intersecta en 2 lados adyacentes

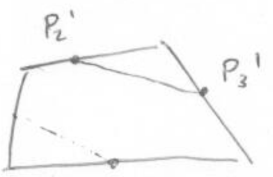
a) $P_2P_3$ intersecta a la base mayor




Sean A y B (y C) los vertices marcados. Luego

$(P_1P_2'P_3') \leq (P_3'AP_2') \leq (P_3'AC) \leq (BAC)$ □

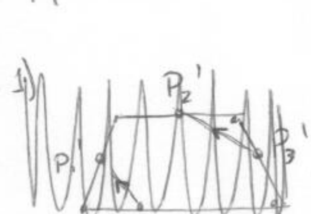
b) $P_2P_3$ no interseca a la base mayor




Sea $P_2'$ el punto de intersección en la base menor

~~Sea $l_1$ la paralela a $P_2'P_3'$ por $P_1$. Vemos 3 casos dependiendo de donde intersecte nuevamente al trapecio. (Esa intersección existe ya que $P_1$ no es un vértice).~~

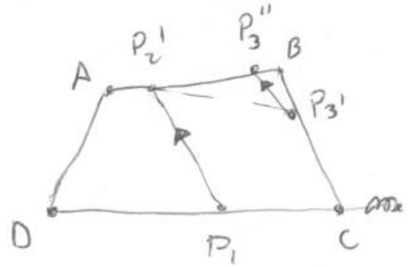
~~Consideremos las paralelas a $P_1P_2'$ por $P_3'$ y a $P_1P_3'$ por $P_2'$. Una de ellas debe intersectar a la base mayor o de lo contrario no sería la base mayor.~~




Sea $l_1$ la paralela a $P_2'P_1$ por $P_3'$. Luego, debe intersectar a alguna de la base menor o la base mayor.

# Problem 4

i) Si intersecta a la base menor



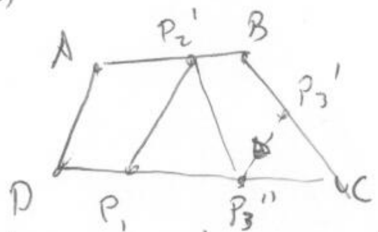
Sea $P_3''$ la intersección, luego, $(P_1P_2'P_3') = (P_1P_2'P_3'')$.

Sean A, B y C los puntos del dibujo (y D)

Luego, $(P_1P_2'P_3'') \le (P_1AB) = (ABC)$

como $AB \le DC$ por ser DC base mayor entonces $(ABC) \le (ADC)$, como se quiere □

2) Si intersecta a la base mayor



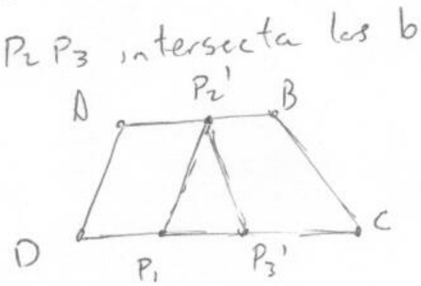
Con un argumento similar se ve que

$(P_1P_2'P_3') = (P_1P_2'P_3'') \le (P_2'DC) = (ADC)$ □

Luego, este caso está concluido.

ii) $P_2P_3$ interseca en 2 lados opuestos

a) $P_2P_3$ intersecta las bases

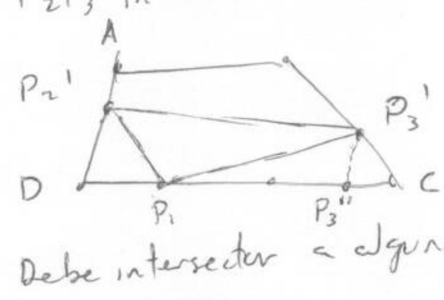


Sean A, B, C y D como en el dibujo

Se tendrá que

$(P_1P_2'P_3') \le (P_2'DC) = (ADC)$ □

b) $P_2P_3$ intersecta en los lados no necesariamente paralelos



~~Sea $l_1$ la paralela a $P_2'P_3'$ por $P_1$~~

~~Debe intersectar a alguno de los 2 lados no paralelos~~

Sea $l_1$ la paralela a $P_1P_2'$ por $P_3'$.

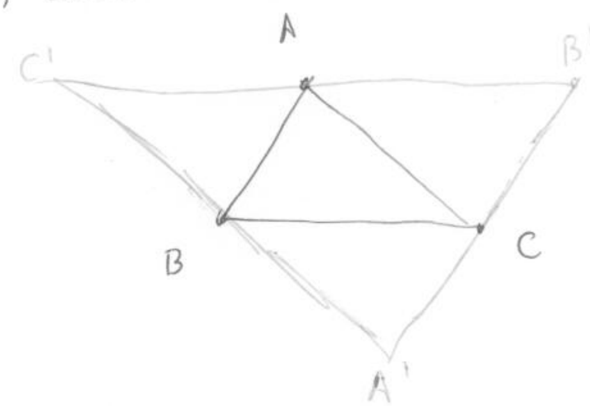
Debe intersectar a alguna de las bases. Si es la base menor, tenemos un caso análogo a i) b). Si es a la base mayor, entonces

$(P_2'P_1P_3') = (P_2'P_1P_3'') \le (AP_1'P_3'') \le (ADC)$ □.

Luego, como todos los casos posibles son ciertos, el lema es cierto □

# Problema 4

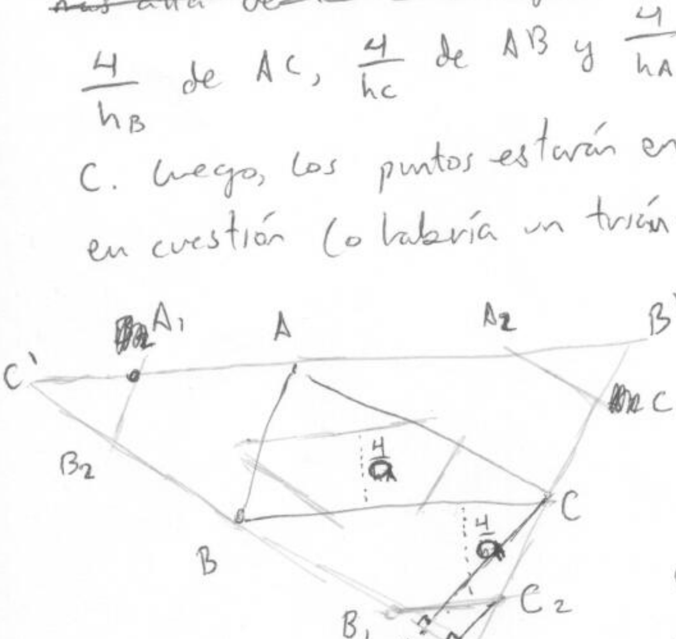
Ahora, consideremos el triángulo de mayor área, y sean A, B, C sus vértices




Como es el triángulo de mayor área, entonces los otros 2 puntos está dentro de A'B'C', un triángulo formado por

i) La paralela por A a BC
ii) La paralela por B a AC
iii) La paralela por C a AB

Además, como todos los triángulos tienen área ~~mayor a 2~~ mayor o igual a 2, ~~mas allá de las rectas siguientes~~ consideremos las rectas paralelas a distancia $\frac{4}{h_B}$ de AC, $\frac{4}{h_C}$ de AB y $\frac{4}{h_A}$ de BC, donde $h_A, h_B, h_C$ son las alturas desde A, B y C. Luego, los puntos estarán en lados opuestos del plano respecto de la recta en cuestión (o habría un triángulo con área menor a 2).




Sean a, b y c las longitudes de BC, AC y AB respectivamente.

Sean $H_{C_2}$ y $H_C$ los pies de las perpendiculares a A'C' desde $C_2$ y C, respectivamente.

Como $\measuredangle CBA' = \measuredangle C_2B_1A'$, entonces por AA pasa que $\triangle CBH_C \sim \triangle C_2B_1H_{C_2}$.

Luego, $\frac{CB}{C_2B_1} = \frac{CH_C}{C_2H_{C_2}}$. Como $CBA' \cong CBA$, entonces $CB = a$ y $CH_C = h_C$, de donde

$$\frac{a}{C_2B_1} = \frac{h_C}{C_2H_{C_2}}$$

Para obtener $C_2B_1$, notemos por la semejanza entre $CBA'$ y $C_2B_1A'$ se tendrá que

$$\frac{a}{C_2B_1} = \frac{h_A}{(h_A - \frac{4}{a})} = \frac{ah_A}{ah_A - 4}$$

# Problema 4

Luego, igualando tendremos

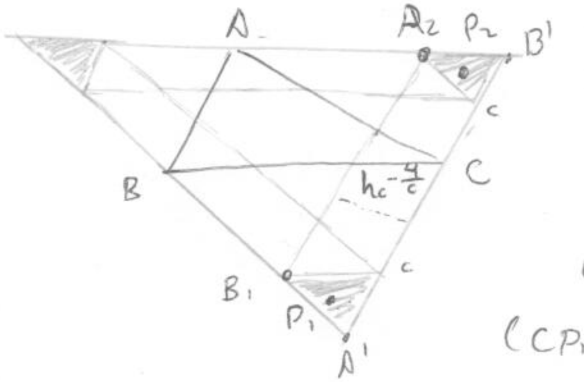
$$\frac{a h_A}{a h_A - 4} = \frac{h_c}{C_2 H C_2} \text{, de donde } C_2 H C_2 = \left(1 - \frac{4}{a h_A}\right) \cdot h_c$$

$$C_2 H C_2 = h_c - \frac{4 h_c}{a h_A}.$$

Como $a h_A = c h_c = 2(ABC)$ con $(ABC)$ el área de $ABC$, entonces

$$C_2 H C_2 = h_c - \frac{4 h_c}{c h_c} = h_c - \frac{4}{c}.$$

Luego, $C_2$ estará a distancia $\frac{4}{c}$ de la recta $AC$, y analogamente con todos los demás puntos. (Esto que probamos nos sirve para ver concurrencias entre las paralelas); por lo que la figura se verá así:




Con esto, los dos puntos restantes solo pueden estar en alguna de las regiones sombreadas. Sin pérdida de generalidad, supongamos están en las regiones "adyacentes" a $C$.
Luego, por el Lema 1, se tendrá que $(CP_1P_2) \leq (B_1A'B')$. Esto pues $B_1A_2B'A'$ es un trapecio y $A'B'$ es la base mayor.

Luego, $(CP_1P_2) \leq (B_1A'B') = \dfrac{\overset{\text{base}}{2c}\left(\overset{\text{altura}}{h_c - \frac{4}{c}}\right)}{2} = ch_c - 4.$

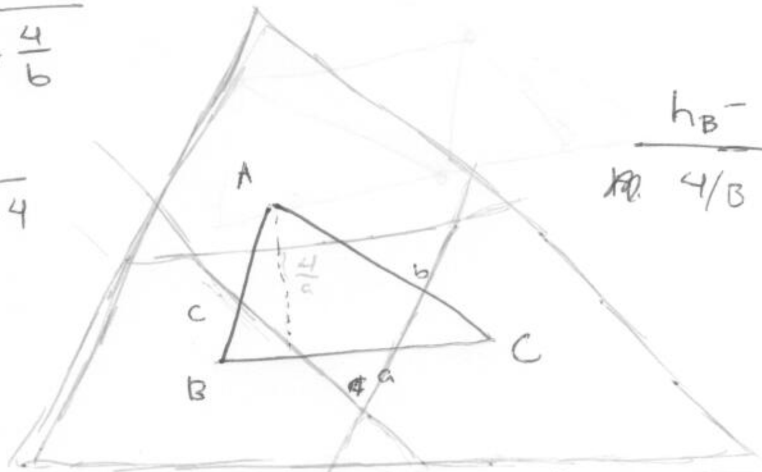
Como $ch_c = 2(ABC)$ y $(ABC) < 3$ por suposición, entonces $(CP_1P_2) < 2$.
Esto es una contradicción con la hipótesis inicial. Luego, existe algún triángulo de área no menor a 3, como se quería, y terminamos ■

Problema 4 

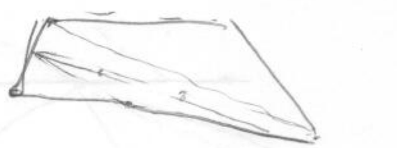
$$h_B x = \frac{4}{b}c - \frac{4}{b}x \qquad \frac{h_B}{4/b} = \frac{c-x}{x}$$

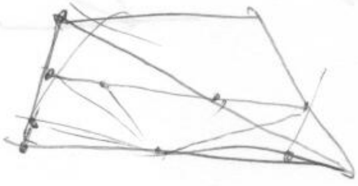
$$x = \frac{\frac{4}{b}c}{h_B + \frac{4}{b}}$$

$$x = \frac{4c}{bh_B + 4}$$

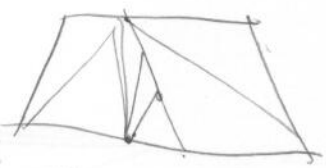



$$\frac{h_B - \frac{4}{B}}{4/B}$$





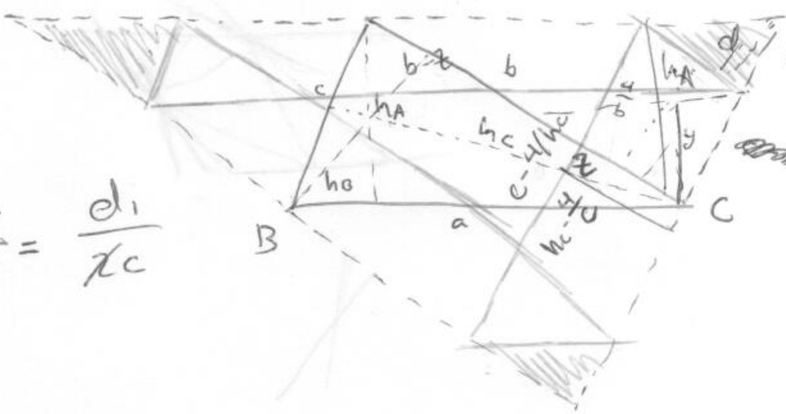
$$\frac{h_B}{\left(\frac{4}{b}\right)}$$



$$\frac{x}{c-x} = \frac{\frac{4}{b}}{d} \qquad \frac{c-x}{x} = \frac{d}{\frac{4}{b}} \qquad \frac{\left(\frac{4}{b}\right)}{h_B} = \frac{x}{c}$$

$$\frac{c}{c-x} \qquad \frac{c}{x} = \frac{h_B}{\left(\frac{4}{b}\right)}$$

$$\frac{4c}{bh_B} = x$$




$$\frac{\frac{4}{b}}{h_B} = \frac{\frac{4}{h_c}}{c}$$

$$x = \frac{4}{h_c}$$

$$\frac{h_c - \frac{4}{c}}{2h_c} = \frac{d_1}{xc} \qquad < \frac{2c \cdot \left(h_c - \frac{4}{c}\right)}{2}$$

$$\frac{c}{x} = \frac{bh_B}{4} \qquad = \frac{ch_c - 4}{2} \geq 2$$

$$\frac{y}{h_c} = \frac{4}{bh_B + 4}$$

$$ch_c \geq 8$$

$$\frac{\frac{4}{h_c}}{c} = \frac{y}{h_a} \qquad \frac{ch_c}{2} \geq 4$$

$$\frac{y}{h_c} = \frac{4}{ch_c + 4}$$

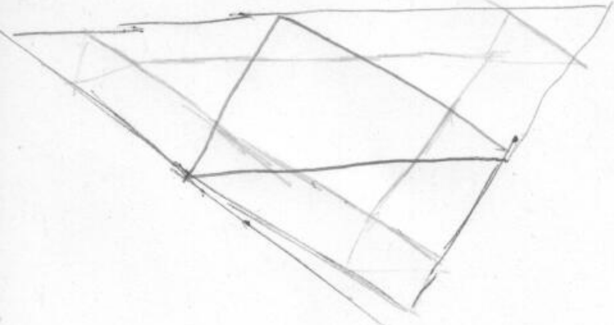
ssi

$$y = \frac{4h_c}{ch_c + 4} = \frac{4}{h_c} \qquad \frac{4}{ch_c} = \frac{y}{h_a} = \frac{4}{ah_a}$$

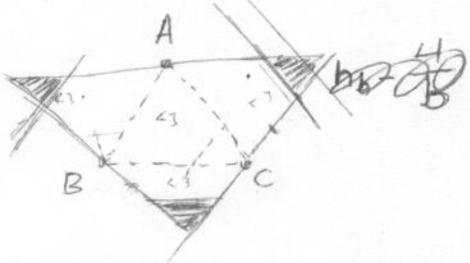
$$y = \frac{4}{a}$$

$$1 - \frac{4}{\cancel{c}h_c} = \frac{d_1}{\cancel{c}} \qquad c - \frac{4}{h_c} = d_1$$

# Problema 4

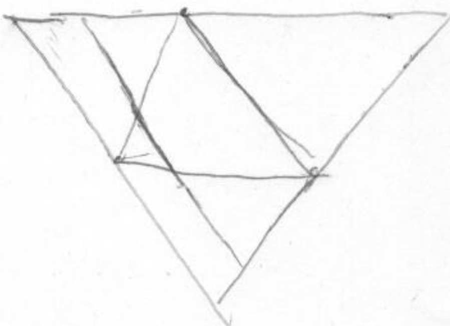


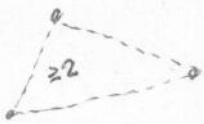
Todas las áreas menores a 3

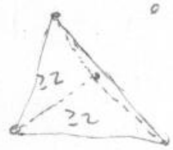


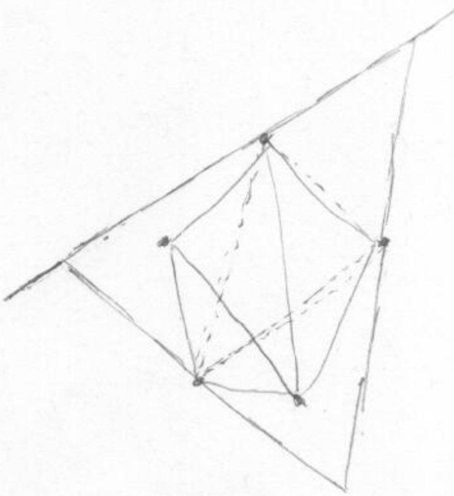

$bh = 4$

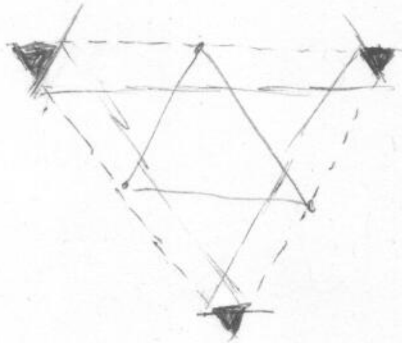
$\frac{4}{b}$





# Problema 5

Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$

$$n^3 + 13n - 273 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$10n < 3n^2 + 274$$

$$\Leftrightarrow$$

$10 < 3n + 274$, lo cual siempre es cierto pues $3n \geq 3$ y $274 > 10$.

~~lo cual es cierto siempre pues si $n \geq 4$, $3n+274 \geq 12$ y si $n = 1,2,3$ la desigualdad sigue siendo~~

Luego, si $n$ es 'cuboso' y existe $m$ tal que $m^3 = n^3 + 13n - 273$ entonces $m < n+1$, que se sigue de lo probado inicialmente.

Ahora, veamos que para $n \in \mathbb{N}$

$$n^3 + 13n - 273 > n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = (n-1)^3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3n^2 + 10n > 272$$

Esto último ocurre cuando $n > 8$. Si $n = 8$ se da la igualdad y si $n < 8$ el lado izquierdo es menor.

Luego, si $n > 8$ es cuboso y existe $m$ tal que $m^3 = n^3 + 13n - 273$, entonces $m > n-1$

De esto y lo anterior, si $n > 8$ es cuboso entonces debe ocurrir que $m = n$.

Sustituyendo en la hipótesis y despejando, obtenemos que

$$n^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$13n = 273$$

$n = 21$ es el único número cuboso mayor a 8.

Ahora, veamos que para $n \in \mathbb{N}$

$$n^3 + 13n - 273 < 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n^3 + 13n < 273$$

Esto ocurre cuando $n < 6$. Luego, si $n < 6$, entonces $n$ no puede ser cuboso, pues $m$ no sería natural.

Con esto, solo falta ver cual de $\{6, 7, 8\}$ es cuboso.

# Problema 5

i) $n=6$

Obtendremos

$m^3 = 216 + 78 - 273$

$m^3 = 78 - 57$

$m^3 = 21$

Como no existe natural con cubo igual a 21, descartamos este caso

ii) $n=7$

Obtendremos

$m^3 = 343 + 91 - 273$

$m^3 = 70 + 91$

$m^3 = 161$

Como esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{N}$, descartamos este caso

iii) $n=8$

Se tendrá

$m^3 = 512 + 104 - 273$

$m^3 = 343$

$m^3 = 7^3$

de donde $m = 7$.

Con esto, podemos concluir que los únicos numeros cubosos son 8 y 21.

Luego, vemos que su suma es 29, y terminamos ■

$\begin{array}{r} 273 \\ -104 \\ \hline 169 \end{array}$ $-169$ $\begin{array}{r} 193 \\ -24 \\ \hline 169 \end{array}$

# Problema 5

Borrador 1/1

$m^3 = n^3 + 13n - 273$

$\begin{array}{r|l} 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \end{array}$

$m^3 - n^3 = 13(n-21)$

$(m-n)(m^2+mn+n^2) = 13(n-21)$

$\begin{array}{r} 273 \\ -216 \\ \hline 57 \\ +78 \\ \hline 135 \end{array}$

$n^3 < m^3 = n^3 + 13n - 273 \overset{?}{<} n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$

$192 + 80 = 272$

$n^3 + 13n - 273 < (n+1)^3$

cuando

$273 + 80 = -1 - 192$

$13n - 273 < 3n^2 + 3n + 1$

$-273 + 104 = -192 + 24 - 1$

$10n < 3n^2 + 274$

$512 - 273 + 104 =$

$10 < 3n + \frac{274}{n}$

si $n \geq 4$, ya se cumple

con $n = 3$

$64 \cdot 3 = 192 + 80$

$\begin{array}{r} 512 \\ -273 \\ \hline 239 \\ +104 \\ \hline 343 \end{array}$

$m^3 < (n+1)^3$

Si $n > 8$ se tiene

$m^3 = n^3$

ssi $13n = 273$

$\boxed{n = 21}$

Si $n < 6$ $m^3 < 0$ ↯

Si $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$

$m^3 = 216 + 78 - 273$

$\begin{array}{r} 343 \\ -273 \\ \hline 70 \\ +91 \\ \hline 161 \end{array}$

$m^3 > (n-1)^3$

$\cancel{n^3} + 13n - 273 > \cancel{n^3} - 3n^2 + 3n - 1$

ssi

$7^3 = 343$

$3n^2 + 10n > 272$

$343 + 91 - 273$

$3n^2 + 10n - 272 > 0$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 6 \\ \hline 78 \end{array}$ $\begin{array}{r} 273 \\ -216 \\ \hline 57 \end{array}$ $\begin{array}{r} 78 \\ -57 \\ \hline 21 \end{array}$

$n^3 + 13n < 273$

~~125 + 13·5~~

Si $n < 6$, $m$ debe ser negativo ↯

~~192 + 80 = 272~~

$\boxed{n = 8}$

$m^3 = 512 + 104 - 273$

$m = 7$

$\underline{n = 6}$

$m^3 = 216 + 78 - 273$

$m^3 = 78 - 57 = 21$ ↯

$n = 7$

$m^3 = 343 + 91 - 273$

$= 91 - 30$

$= 61$ ↯

$\sum_{n \text{ cuboso}} n = 21 + 8 = 29$ ∎