

N 1



Пусть расстояние между пунктами A и C ~~то~~ x , а

между B и C ~~то~~ y . Т.к. за 5 часов скорость

мотоциклиста увеличилась с 90 км/ч до 110 км/ч, а его скорость изменяется на одинаковую величину за одно и то же время, то за 1 час она изменяется на $\frac{110-90}{5} = 4$ км/ч. Заметим, что

тогда в B он приехал со скоростью $90 + 4 \cdot 3 = 102$ км/ч.

Заметим, что т.к. скорость изменяется линейно от времени, то можно считать, что за определённый промежуток времени мотоциклист ехал со ^(постоянной) скоростью, равной полусумме скоростей в начале этого промежутка и в его конце (это так, потому что изменение скорости линейно от времени). А тогда:

$$x + y = \frac{90 + 102 \text{ км/ч}}{2} \cdot 3 \text{ ч} = 96 \text{ км/ч} \cdot 3 \text{ ч} = 288 \text{ км}, \text{ а } x + 2y =$$

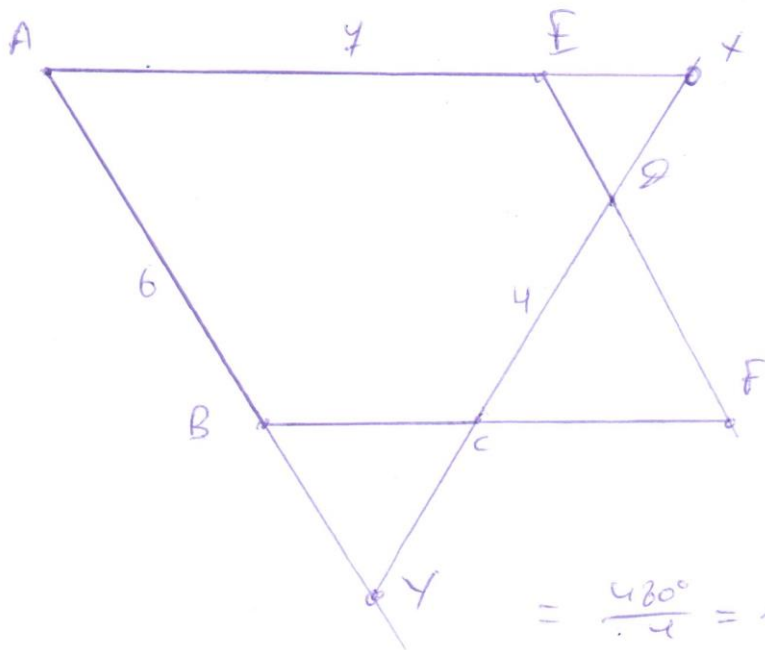
$$= \frac{90 \text{ км/ч} + 110 \text{ км/ч}}{2} \cdot 5 \text{ ч} = 100 \text{ км/ч} \cdot 5 \text{ ч} = 500 \text{ км} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2y + x - x - y = 500 \text{ км} - 288 \text{ км} = 212 \text{ км} \Rightarrow x = x + y - y =$$

$$= 288 \text{ км} - 212 \text{ км} = 76 \text{ км}$$

Ответ: 76 км.

№ 2



Пусть $AE \cap CD = X$,
 $AB \cap CD = Y$
 $ED \cap BC = F$.

Заметим, что сумма углов 5-ику равна 540° . Так $\angle A = 60^\circ$, то

$$\angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ - 60^\circ = 480^\circ, \text{ но } \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \frac{480^\circ}{4} = 120^\circ.$$

А тогда углы, смежные с $\angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ до 180° равны по 60° , т.е. $\angle CBY = \angle BCY = \angle DCF = \angle DFC = \angle EDX = \angle DEX = 60^\circ$. Тогда т.к. в $\triangle CBY, \triangle DCF$ и $\triangle DEX$ по два угла равны 60° , то все они — равнобедренные и $BC = CY = BY, CD = CF = FD = 4, ED = DX = EX$. Но заметим, что $\angle BAE + \angle AEF = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel EF$. А так же $\angle BAE + \angle ABF = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow AE \parallel BF$. А тогда в четырехугольнике AEFB противоположные стороны параллельны $\Rightarrow$ AEFB — параллелограмм $\Rightarrow AE = BF = 4$. $AB = EF = 6$. Но тогда $ED = EF - FD = 6 - 4 = 2$ и $BC = BF - CF = 4 - 4 = 0$. А тогда в $\triangle AXY$ $AY = AB - BY = 6 - 3 = 3, AX = AE + EX = 4 + 2 = 6, XY = CY + CD + DX = 3 + 4 + 2 = 9$. Т.е. $\triangle AXY$ — равнобедренный и расстояние между A и прямой CD (CD совпадает с XY) это высота в равнобедренном треугольнике со стороной 9. Но высота в равнобедренном $\triangle$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ стороны, т.е. в этом случае $9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.
 Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Страница 2 из 6

Докажем неравенство: $(a^n + b^n)^{n+1} > (a^{n+1} + b^{n+1})^n$,
при $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда данное неравенство —
частный случай этого при $n = 2018$:

П.к. $a, b > 0 \Rightarrow a^n > 0$ и $b^n > 0 \Rightarrow a^n + b^n > 0$ и $a^{n+1} + b^{n+1} > 0$,
а тогда из обеих частей можно извлечь корень
 n -ной степени, и неравенство останется верным:

$$(a^n + b^n) \cdot \sqrt[n]{a^n + b^n} > a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$\text{Докажем, что } a^n \cdot \sqrt[n]{a^n + b^n} > a^{n+1}$$

$$a^n \cdot \sqrt[n]{a^n + b^n} \geq a^n \cdot a, \text{ можно сокр. на } a^n > 0$$

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} > a, \text{ можно возвести в } n\text{-ую степень}$$

$$a^n + b^n > a^n \Rightarrow b^n > 0 - \text{что верно для любого } b > 0$$

Верно и $a^n + b^n > a^n$, а т.к. обе части больше 0, то и
извлечение корня n -ой степени оставляет неравенство вер-
ным $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n + b^n} > a$, а умножение на $a^n > 0$ его оставит его
верным $\Rightarrow a^n \cdot \sqrt[n]{a^n + b^n} > a^{n+1}$. Аналогично $b^n \cdot \sqrt[n]{a^n + b^n} > b^{n+1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (a^n + b^n) \sqrt[n]{a^n + b^n} > a^{n+1} + b^{n+1}$, а возведя в n -ую степень
(обе части $> 0 \Rightarrow$ так делать можно) получим требуемое:

$$(a^n + b^n)^{n+1} > (a^{n+1} + b^{n+1})^n. \text{ Подставив } n = 2018 \text{ получим:}$$

$$(a^{2018} + b^{2018})^{2019} > (a^{2019} + b^{2019})^{2018} \text{ Ч.т.д.}$$

Пусть $n^3 + 13n - 243 = a^3$ ($a \in \mathbb{Z}$). Заметим, что это можно представить в таком виде:

$n^3 + 13(n-21) = a^3$, т.е. 21 — кубовое число, т.е. при $n=21$ имеем: $21^3 + 13(21-21) = 21^3 + 0 = 21^3$ — куб натурального числа.

Заметим, что при $n \leq 5$ $n^3 + 13n - 243 \leq 5^3 + 13 \cdot 5 - 243 = 125 + 65 - 243 = 190 - 243 = -53 < 0$. Т.е. не кубовое число больше.

Заметим, что при $n > 21$ имеем:

$n^3 + 13(n-21) = a^3$. Но тогда $a > n$ (при $n > 21$ значение $13(n-21) > 0$). Т.е. $a \geq n+1$, но тогда $a^3 \geq (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Сравним это число с $n^3 + 13n - 243$:
 $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 13n - 243 \Leftrightarrow 3n^2 \leq 10n - 244$, но при $n > 21$ $3n^2 > 63n \Rightarrow 3n^2 > 63n > 10n - 244$, а неравенство $63n > 10n - 243$ — верно при любом $n \in \mathbb{Z}$.
 Т.е. $(n+1)^3 > n^3 + 13n - 243$ для любого $n > 21$. Т.е.

$n^3 + 13n - 243$ — не куб nat. числа при $n > 21$ (т.е. оно больше n^3 , но меньше $(n+1)^3$). Тогда кубовое число не больше 21.
 Заметим, что при $5 \leq n < 21$ получим:

$n^3 + 13(n-21) = a^3$. Заметим, что при $n \geq 9$ имеем:
 $n^3 + 13(n-21) = a^3$, но тогда $a < n$ (при $n < 21$ значение $13(n-21) \leq 0$). А тогда $a \leq n-1 \Rightarrow a^3 \leq (n-1)^3 =$
 $= n^3 - 3n^2 + 3n - 1$

и 5 (продолжение)

Сравним это число с $n^3 + 13n - 273$:

$$n^3 - 3n^2 + 3n - 1 \vee n^3 + 13n - 273 \Leftrightarrow -3n^2 \vee 10n - 272$$

Для $9 \leq n < 21$ имеем: $-3n^2 \leq -3 \cdot 81 = -243$

$$10n - 272 \geq 90 - 272 = -182, \text{ т.е. } 10n - 272 \geq -182 >$$

$$> -243 \geq -3n^2, \text{ т.е. при } n \geq 9 \quad n^3 + 13n - 273 \text{ больше}$$

$(n-1)^3$, но меньше n^3 , т.е. не является кубом натурального числа $\Rightarrow$ кубоватые числа меньше 21

не превосходят 8. Тогда. Заметим, что остается проверить только 3 числа (и.к. $5 < n < 9$, и.к. $n \in \mathbb{Z}$, остаются $n=6, n=7$ и $n=8$):

$$n=6: 6^3 + 13 \cdot 6 - 273 = 216 + 78 - 273 = 21 - \text{не куб};$$

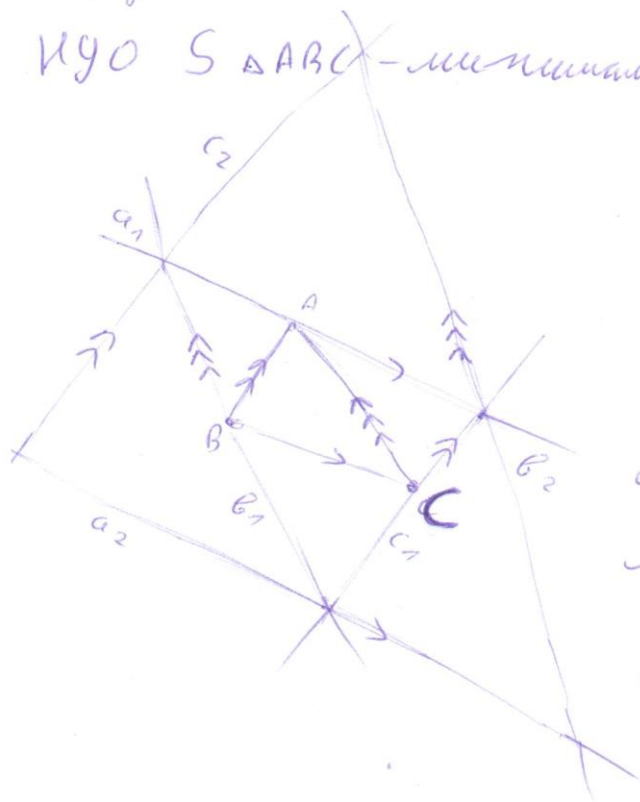
$$n=7: 7^3 + 13 \cdot 7 - 273 = 343 + 91 - 273 = 161 - \text{не куб};$$

$$n=8: 8^3 + 13 \cdot 8 - 273 = 512 + 104 - 273 = 343 - \text{куб}.$$

Т.е. кубоватые являются числа 8 и 21. Их сумма равна 29.

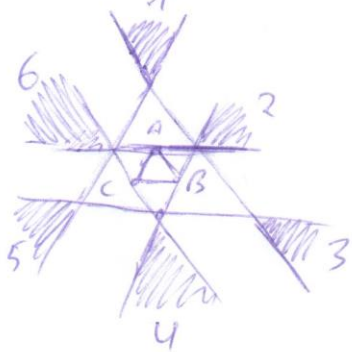
Ответ: 29.

Пусть эти пять точек называются A, B, C, D и E . Пусть
иго $S_{\triangle ABC}$ - минимальна (иначе перемещаем точки).



Заметим, что точки E и D не
могут лежать между прямыми
 a_1 и a_2 , т.к. тогда $S_{\triangle BCD}$ ($\triangle BCE$)
меньше $S_{\triangle ABC}$, т.к. у них общее
основание BC , а высота, опущенная
из B и C в $\triangle BCD$ будет
меньше, т.к. расстояние от любой
точки между прямыми a_1 и a_2 до
прямой BC меньше, чем от точки
 A до прямой BC ($BC \parallel a_1, BC \parallel a_2$ и
лежат посередине между a_1 и a_2)

Аналогично E и D не лежат
Тогда точки E и D лежат в заштрихованной области.



Заметим, что если E или D лежат в
области 1, 3 или 5, то есть треугольник
мощности не меньше 6 (если E лежит
в области 1, то $S_{\triangle EBC} = S_{\triangle ABK} + S_{\triangle EAC} + S_{\triangle EBC} \geq$
 $\geq 2+2+2=6$, т.е. $S_{\triangle EBC} \geq 6$, т.е. его S не меньше 3)

Если же E и D лежат в разных областях из 2, 4, 6, то
Есть Δ , с площадью не меньше 4 (Если D в 2, а E в 4, то
 $S_{\triangle DEA} \geq \frac{4 S_{\triangle ABC}}{2} = 2 S_{\triangle ABC} \geq 2 \cdot 2 = 4$).

Если же E и D попадают в одну область, то есть Δ площадью
не меньше 3-х (Если E и D в 2, то $S_{\triangle CED}$ не меньше 3, иначе
 $S_{\triangle ABC}$ - не мин. площадь).

Т.е. всегда есть Δ с $S \geq 3$. Ч.т.д.

Справедливо