

№ 1



на участке АВ казавшаяся скорость $90 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$
время 3 ч, пусть ускорение $a \frac{\text{км}}{\text{ч}^2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = 90 \cdot 3 + \frac{a \cdot 3^2}{2} \quad \text{т.ч.}$$

пусть с ускорением a считается по формуле

$$S = V_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

потом с тем же ускорением едет по ВС ещё 2 ч $\Rightarrow$ он проезжает всего расстояние $AB + BC$, ~~то~~ с ускорением a и как скоростью $90 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, ~~$AB + BC = 90 \cdot 5$~~ едет он 3 ч + 2 ч = 5 ч.

$$\Rightarrow AB + BC = 90 \cdot 5 + \frac{a \cdot 5^2}{2}, \quad \text{и за 5 часов набирает скорость } 110 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow 90 + 5 \cdot a = 110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a = 20 \Rightarrow a = 4 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}^2} \right)$$

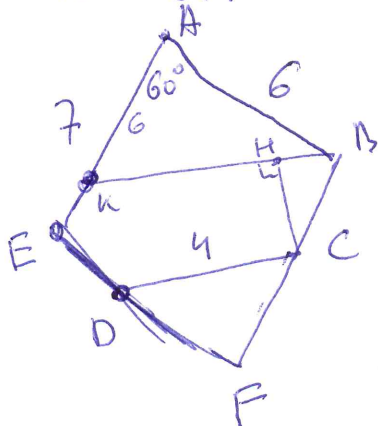
$$\Rightarrow AB = 270 + \frac{4 \cdot 3^2}{2} = 270 + 18 = 288$$

$$AB + BC = 450 + \frac{4 \cdot 5^2}{2} = 450 + 50 = 500$$

$$\Rightarrow BC = 500 - 288 = 212 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = AB - BC = 288 - 212 = 76.$$

№ 2.



Пусть $F = ED \cap BC$. т.к. сумма углов пятиугольника $= (5-2)180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, и $\angle A = 60^\circ$, а

все остальные равны, то они равны

$$\text{по } \frac{540^\circ - 60^\circ}{4} = \frac{480^\circ}{4} = 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EAB + \angle CBA = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EA \parallel BC, \quad \angle BAE + \angle AED = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB \parallel ED \Rightarrow AB \parallel EF$ и $AE \parallel BF \Rightarrow ABFE$ - параллелограмм $\Rightarrow \angle F = \angle A = 60^\circ$, $\angle FCD = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, и аналог, $\angle CDF = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CFD$ все углы по $60^\circ \Rightarrow$ все стороны равны $\Rightarrow CF = FD = DC = 4$, из параллелограмма $BF = AE = 7$, $EF = AB = 6 \Rightarrow ED = EF - DF = 6 - 4 = 2$, $BC = BF - CF = 7 - 4 = 3$

Пусть K : $AK = 6$ и $K \in AF$, тогда $\triangle ABK$ — равносторонний т.к. тогда угол при $KB = \frac{1}{2}$ от $120^\circ = 60^\circ$.

$$\Rightarrow \angle ABK = 60^\circ \Rightarrow \angle KBC = \angle ABC - \angle KBA = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

и $\angle DCF = 60^\circ \Rightarrow KB \parallel DC \Rightarrow$ ~~выс~~ расстояние от A до $CD =$ расстояние от A до KB + расстояние от KB до DC .

от A до $KB =$ высоте в равностороннем $\triangle$ со стороной 6 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}, \text{ расстояние от } KB \text{ до } CD = CH, \text{ где } CH - \text{перп. из } C \text{ на } KB$$

$$CH = CB \cdot \sin \angle KBC = 3 \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{наше расстояние } \frac{3}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

№3

~~$$(a^{2018} + b^{2018})^{2019} \geq (a^{2019} + b^{2019})^{2018}$$~~

т.к. наше неравенство симметрическое, можно считать, что $a \geq b$, поделим обе части на $b^{2018 \cdot 2019}$ (знак сохр.)

$$\left(\frac{a^{2018} + b^{2018}}{b^{2018}} \right)^{2019} \geq \left(\frac{a^{2019} + b^{2019}}{b^{2019}} \right)^{2018}$$

$$\left(\left(\frac{a}{b} \right)^{2018} + 1 \right)^{2019} \geq \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{2019} + 1 \right)^{2018}, \text{ пусть } c = \frac{a}{b}, \text{ т.к.}$$

$$a \geq b \Rightarrow c = \frac{a}{b} \geq 1.$$

~~$$\text{где } (c^{2018} + 1)^{2019} \geq (c^{2019} + 1)^{2018}$$~~

поделим на $(c^{2018} + 1)^{2018}$ обе части

$$c^{2018} + 1 \geq \left(\frac{c^{2019} + 1}{c^{2018} + 1} \right)^{2018}, \text{ заметим, что}$$

$$\frac{c^{2019} + 1}{c^{2018} + 1} \leq c \text{ т.к. } c + 1 \leq c^{2019} + c \text{ (поделим на } c^{2018} \text{ и получим } 1 + \frac{1}{c^{2018}} \leq c + 1 \text{, т.к. } 1 \leq c \text{)}$$

$$\Rightarrow c \geq \left(\frac{c^{2019} + 1}{c^{2018} + 1} \right)^{2018} \Rightarrow c^{2018} \geq \left(\frac{c^{2019} + 1}{c^{2018} + 1} \right)^{2018} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^{2018} + 1 > \left(\frac{c^{2019} + 1}{c^{2018} + 1} \right)^{2018} \Rightarrow \text{исходный знак } >.$$

N° 5

$$n^3 + 13n - 273 = s^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^3 - n^3 = 13n - 273 \Rightarrow (s-n)(s^2 + sn + n^2) = 13n - 273$$

1) $s = n \Rightarrow 0 = 13n - 273 \Rightarrow n = 21$

2) $s > n \Rightarrow s \geq n+1 \Rightarrow s - n \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 13n - 273 = (s-n)(s^2 + sn + n^2) \geq s^2 + sn + n^2$$

$$\Rightarrow n^2 + (s-13)n + s^2 + 273 \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. отн. к n ветви параболы вверх то если есть значение $\leq 0 \Rightarrow$ есть корни.

$$\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow (s-13)^2 - 4(s^2 + 273) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 + 26s + 169 - 4s^2 - 273 \cdot 4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3s^2 + 26s + 273 \cdot 4 - 169 \leq 0$$

$\Rightarrow s$ лежит между корней (≥ 0)

$$\text{корни} = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4(273 \cdot 4 - 169) \cdot 3}}{6}, \text{ но}$$

$$D = 26^2 - 4(273 \cdot 4 - 169) \cdot 3 < 0 \text{ т.к.}$$

$$13^2 - (273 \cdot 4 - 169) \cdot 3 < 0 \text{ т.к.}$$

$$169 + 169 \cdot 3 - 273 \cdot 4 < 0 \text{ т.к.}$$

$$169 < 273 \Rightarrow \text{корней нет.}$$

$\Rightarrow$ нет таких s .

3) $s < n \Rightarrow |s| + s \in n \Rightarrow n - s \geq 1$ и ~~ветви~~

$$273 - 13n = (n-s)(s^2 + ns + s^2) \geq s^2 + ns + s^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 273 \geq s^2 + n(13+s) + n^2 \geq$$

$$\geq s^2 + (s+1)(13+s) + (s+1)^2 =$$

$$= 3s^2 + 14s + 13 + 2s + 1 = 3s^2 + 16s + 14$$

$$\Rightarrow 3s^2 + 16s - 259 \leq 0 \Rightarrow s \text{ лежит между корнями}$$

$$\text{а корни} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 259 \cdot 3}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 759 \cdot 3}}{3} =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 750 + 27}}{3} = \frac{-8 \pm \sqrt{841}}{3} = \frac{-8 \pm 29}{3} \Rightarrow$$

корни

корни равны $\frac{29-8}{3} = \frac{21}{3} = 7$ и $\frac{-8-29}{3} < 0$

$\Rightarrow$ так $S \geq 1 \Rightarrow 1 \in S \in \mathbb{Z}$ проверим эти S .

~~$S=1 \Rightarrow n^3 + 13n - 273 = 1$~~
 ~~$n^3 + 13n - 273 = S^3$~~

рассмотрим по модулю 9

~~$0 \nmid 13 \nmid 273 \Rightarrow 216 \nmid 216 + 78 - 273 = 21$~~
 $\Rightarrow 216 + 78 - 273 = 21$ значение при $n=6$.

при $n=5$ $n^3 + 13n - 273 = 125 + 65 - 273 < 0$

$\Rightarrow$ при $n \leq 5$ S не кубическое.

$\Rightarrow n \geq 6$

$n=6$ знач. $6^3 + 13 \cdot 6 - 273 = 216 + 78 - 273 = 21$
не куб.

$n=7$ знач $7^3 + 13 \cdot 7 - 273 = 343 + 91 - 273 = 161$

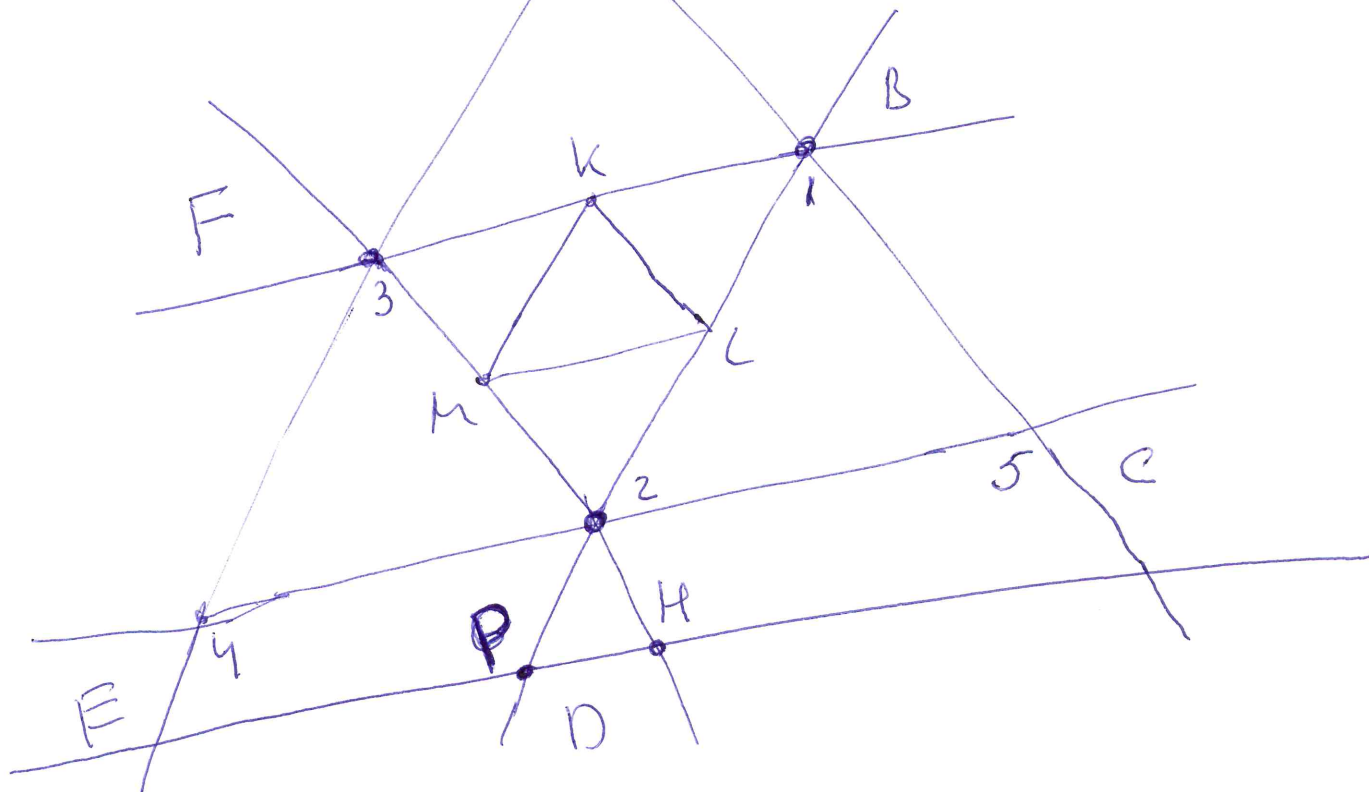
$n=8$ знач $8^3 + 13 \cdot 8 - 273 = 512 + 104 - 273 = 343$ не куб.
 $= 616 - 273 = 343 = 7^3 \Rightarrow n=8$ - кубическое.

$n \geq 9$ знач $>$ знач. при $n=8 \leq 7^3 \geq S^3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ знач никогда не $S^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сумма кубовых чисел $= 8 + 21 = 29$.

№4

Рассмотрим треугольник ABC как наименьшей площадью. KLM .



построим следующие зоны. построим прямую l_2 через $L \parallel MK$, l_3 через $K \parallel ML$ и l_1 через $M \parallel KL$, $1, 2$ и 3 - их точки пересечения, теперь аналогично построим точки $4, 5, 6$ и соотв. прямые, но для $\triangle 123$. Получим области A, B, C, D, E и F . Только в них могут быть остальные две из данных 5 точек т.к. если точка T лежит между l_2 и l_3 без отр. общности l_2 и l_3 , то $S(MKT) < S(MKL)$ т.к. высота из T на MK меньше высоты из L на MK т.к. расстояние между l_2 и $MK = h_L$ (высота в MKL из L) и между l_3 и MK т.к. $\angle 3KM \geq \angle LMK$ т.к. $KL \parallel 3M$ и $3K \parallel ML$ ($MLK3$ - параллелограмм) $\Rightarrow h_L \geq h_3$ (высота из 3 на MK). а у MKL наименьшая площадь

Получаем, что между параллельными прямыми нет остальных точек $\Rightarrow$ они или в А или В или С или D или Е или F.

Если $T \in E$, С или А, без опр. общности в ΔA , то $S(MLT) \geq \frac{ML \cdot 3h_k}{2}$ т.к. расстояние

от Δ до $3l$ равно $2h_k$ т.к. $\Delta G13 \sim \Delta MKL$ (попарно параллельные стороны) и с коэффициентом 2. $\Rightarrow$ высота из Δ на $ML = 2h_k + h_k = 3h_k$ т.к. расст. от $3l$ до $ML =$ высоте из K на ML , а

$T \in A$ дальше от ML , чем $\Delta \Rightarrow$ высота $\geq$.

$\Rightarrow S \geq \frac{ML \cdot h_k}{2} \cdot 3 = S(MKL) \cdot 3 \geq 2 \cdot 3 = 6$. мы нашли. $\Rightarrow T \in D, B$ или F .

Если верш. 5-я вершина S и T в разных частях, то без опр. общности D и B . тогда

$S(TSM) \geq S(2lM)$ т.к. ~~высота из M на $2l$~~

~~$\Delta S \Rightarrow$ высоты $\Delta 2lM$ и ΔTSM~~ $\Delta 2lM$ лежит внутри ΔTSM . $S(2lM) = \frac{2l \cdot h_L}{2}$ т.к. расст. от MK до $2l =$ расст. от L до $MK \cdot 2$

~~$2l = 2L + 1L = MK + MK = 2MK$~~ и $2l = 2L + 1L = MK + MK = 2MK$ $\Rightarrow S(2lM) = \frac{2MK \cdot h_L}{2} = 2 \cdot S(MKL) \geq 2 \cdot 2 = 4$.

$\Rightarrow$ ок нам подходит.

Если T и S в одной, без опр. общности в D . проведём прямую PH и ML пересекут

на расстоянии $\frac{6}{ML}$ от ML , в полуплоскости в которой нет K . от 2 до $ML = h_k$ в $\Delta MKL = \frac{2 \cdot S(MKL)}{MK} < \frac{6}{ML}$ т.к. или $S(MKL) \geq 3$, тогда мы нашли ~~нужный~~ нужный.

иначе PH ниже 45 отн. ML , $\odot$

если T и S ~~ниже~~ ~~ниже~~ ~~ниже~~ PH (отн. ML)
 $\&$ (без огр. обужности T ниже PH (отн. ML))

$$S(TML) \geq \frac{ML \cdot h_{\text{цт}}}{2}, \quad h_{\text{цт}} \geq \text{расст. от } PH \text{ до } ML = \frac{6}{ML} \Rightarrow S(TML) \geq \frac{ML \cdot \frac{6}{ML}}{2} = 3$$

$\Rightarrow$ мы опять нашли кушковой. $\Rightarrow T$ и S лежат
 внутри $\triangle ZHP \Rightarrow S(MTS) < S(MPH)$

т.к. ~~линия~~ ~~строга~~ ~~внут~~

MTS лежит строго внутри MPH
 (на PH никого нет)

~~$S(MPH) = \frac{6}{ML} \cdot PH = 3 \cdot \frac{PH}{ML}$~~
~~нужно доказать, что $PH \leq \frac{ML \cdot h_{\text{к}}}{2}$~~

высота из Z на $ML = a$ и Z на $PH = b$

$$\Rightarrow a + b = \frac{6}{ML} \quad \frac{ML}{PH} = \frac{a}{b}; \quad a = \frac{2b}{2b+1} \quad h_{\text{к}} \text{ (высота из } K \text{ в } \triangle MKL)$$

$$h_{\text{к}} = \frac{2S(MKL)}{ML} \geq \frac{2 \cdot 2}{ML} = \frac{4}{ML} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \leq \frac{6}{ML} - \frac{4}{ML} = \frac{2}{ML} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{PH}{ML} = \frac{b}{a} \leq \frac{\frac{2}{ML}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(MPH) = \frac{6}{ML} \cdot PH \leq 3 \cdot \frac{PH}{ML} \leq 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2$$

$\Rightarrow$ такого не бывает. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в любом случае есть $\triangle$ в $S \geq 3$ $\square$