

№1.

Пусть v_1 - скорость мотоциклиста, когда он приехал в В, S - расстояние от А до В и x - расстояние от В до С.

Тогда за 5 часов он по условию приехал $S+x = \frac{90+110}{2} \cdot 5 = 500$
За 3 часа он приехал $S = \frac{90+v_1}{2} \cdot 3$. За 2 часа он приехал $x = \frac{v_1+110}{2} \cdot 2 = v_1+110$. Значит

$$\frac{90+v_1}{2} \cdot 3 + v_1 + 110 = 500 \quad | \cdot 2$$

$$270 + 3v_1 + 2v_1 + 220 = 1000$$

$$5v_1 = 510$$

$$v_1 = 102$$

Значит, когда мотоциклист приехал в В, его скорость была 102 км/ч. Теперь можем найти S и x

$S = \frac{90+102}{2} \cdot 3 = 288$ км, $x = \frac{102+110}{2} \cdot 2 = 212$ км. Значит расстояние от А до С равно $S-x = 288-212 = 76$ км.

Ответ: 76 км.

№2.

Дано: $ABCE$ - пятиугольник, $\angle A = 60^\circ$

$AB=6$ $CD=4$ $AE=7$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

Найти: AH

Решение:

1. Сумма углов в пятиугольнике $180(n-3) = 180(5-3) = 360^\circ$, где n - кол-во углов.

2. ~~Пятиугольник~~ $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \frac{360^\circ - \angle A}{4} = \frac{360^\circ - 60^\circ}{4} = 75^\circ$

3. $\angle PED = \angle PDE = 60^\circ \Rightarrow \angle P = 60^\circ \Rightarrow \triangle PED$ - равносторонний $\Rightarrow PE = DE = PD = x$

Аналогично $BC = CK = BK = z$

4. $\angle A = \angle K = \angle P = 60^\circ \Rightarrow \triangle APK$ - равносторонний $\Rightarrow$

$\Rightarrow AP = AK = PK = AE + PE = 7 + x$

Значит $AK = AP$, $7 + x = 6 + z \Rightarrow z = x + 1 \Rightarrow BK = CK = CB = x + 1$

5. $CD = PK - PD - CK = x + 7 - x - x - 1 = 6 - x$, а по условию $CD = 4$
 $6 - x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AP = AK = PK = 9$

6. Т.к. $\triangle APK$ - равносторонний $\Rightarrow AH$ - высота (по построению) и медиана $\Rightarrow PH = HK = \frac{1}{2} PK = \frac{9}{2}$

7. В $\triangle APH$ - прямоугольном по т. Пифагора $AH = \sqrt{AP^2 - PH^2} = \sqrt{9^2 - (\frac{9}{2})^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9^2}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 4,5\sqrt{3}$

Ответ: $4,5\sqrt{3}$

№ 3.

$$(a^{2018} + b^{2018})^{2019} > (a^{2019} + b^{2019})^{2018}$$

Не учитывая общности будем считать, что $b > a$, $\frac{b}{a} > 1$.
Умножим обе части неравенства на положительное число $(\frac{1}{a})^{2018 \cdot 2019}$

$$(\frac{a^{2018} + b^{2018}}{a^{2018}})^{2019} > (\frac{a^{2019} + b^{2019}}{a^{2019}})^{2018}$$

$$(1 + (\frac{b}{a})^{2018})^{2019} > (1 + (\frac{b}{a})^{2019})^{2018}$$

$$((\frac{b}{a})^{2018} + 1)^{2019} = (\frac{b}{a})^{2018 \cdot 2019} + C_{2019}^1 (\frac{b}{a})^{2018 \cdot 2018} + C_{2019}^2 (\frac{b}{a})^{2018 \cdot 2017} + \dots$$

$$((\frac{b}{a})^{2019} + 1)^{2018} = (\frac{b}{a})^{2018 \cdot 2019} + C_{2018}^1 (\frac{b}{a})^{2018 \cdot 2018} + C_{2018}^2 (\frac{b}{a})^{2018 \cdot 2017} + \dots$$

Рассмотрим k -ое слагаемое в каждой сумме

$$C_{2019}^k (\frac{b}{a})^{2018 \cdot (2019-k)}$$

$$C_{2018}^k (\frac{b}{a})^{2018 \cdot (2018-k)}$$

Очевидно, что $C_{2019}^k > C_{2018}^k$ и $2018(2019-k) = 2018 \cdot 2019 - 2018k >$

$$> 2018 \cdot 2019 - 2019k = 2019(2018-k) \Rightarrow (\frac{b}{a})^{2018(2019-k)} > (\frac{b}{a})^{2019(2018-k)}$$

$$+ k \cdot \frac{b}{a} > 1$$

В сумме $(1 + (\frac{b}{a})^{2018})^{2019}$ на одно слагаемое больше, чем в

$(1 + (\frac{b}{a})^{2019})^{2018}$, значит $(1 + (\frac{b}{a})^{2018})^{2019} > (1 + (\frac{b}{a})^{2019})^{2018} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a^{2018} + b^{2018})^{2019} > (a^{2019} + b^{2019})^{2018}, \text{ что и требовалось.}$$

№ 5.

Если $n^3 + 13n - 273$ - чётное, то $n^3 + 13n - 273 = 2m^3$, а

$m = n + k$, $k \in \mathbb{Z}$, тогда

$$(n+k)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 + 3n^2k + 3nk^2 + k^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$3n^2k + n(3k^2 + 13) + k^3 + 273 = 0$$

$$3n^2k - n(13 - 3k^2) + k^3 + 273 = 0$$

$$D = (13 - 3k^2)^2 - 12k(k^3 + 273) = 169 - 78k^2 + 9k^4 - 12k^4 - 273 \cdot 12k =$$

$$= -3k^4 - 78k^2 - 273 \cdot 12k + 169 > 0$$

$$3k^4 + 78k^2 + 273 \cdot 12k + 169 < 0$$

$$f'(x) = 12k^3 + 156k + 273 \cdot 12 = 12(k^3 + 13k + 273) = 0$$

$$k^3 = -13k - 273$$

k^3 - возрастающая ф-ция, а $-13k - 273$ - убывающая $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ они имеют только 1 точку пересечения. и эта точка

будет точкой экстремума, а она одна т.е. можно записать,

что $f(-10) > 0$ $f(-9) > 0$ $\Rightarrow$ не-во выполняется для $k = -9, -8, \dots$

$$f(0) < 0 \quad f(1) > 0$$

$$1) \quad \underline{k=0}, \text{ totga}$$

$$n^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$13n = 273$$

$$n = 21$$

$$2) \quad \underline{k=-1}$$

$$(n-1)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + 13n - 273$$

$$3n^2 - 10n - 272 = 0$$

$$D/4 = 25 + 816 = 841 = 29^2$$

$$n_1 = \frac{-5-29}{3} = -\frac{34}{3} \notin \mathbb{N} \quad n_2 = \frac{-5+29}{3} = 8$$

$$3) \quad \underline{k=-2}$$

$$(n-2)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 6n^2 + 12n - 8 = n^3 + 13n - 273$$

$$6n^2 - n - 265 = 0$$

$$D = 1 + 6360 = 6361$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{6361}}{12} \notin \mathbb{N}$$

$$4) \quad \underline{k=-3}$$

$$(n-3)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 9n^2 + 27n - 27 = n^3 + 13n - 273$$

$$9n^2 - 14n - 246 = 0$$

$$D/4 = 49 + 2214 = 2263$$

$$n = \frac{14 \pm \sqrt{2263}}{9} \notin \mathbb{N}$$

$$5) \quad \underline{k=-4}$$

$$(n-4)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 12n^2 + 48n - 64 = n^3 + 13n - 273$$

$$12n^2 - 35n - 209 = 0$$

$$D = 1225 + 10032 = 11257$$

$$n = \frac{35 \pm \sqrt{11257}}{24} \notin \mathbb{N}$$

$$6) \quad \underline{k=-5}$$

$$(n-5)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 15n^2 + 75n - 125 = n^3 + 13n - 273$$

$$15n^2 - 62n - 148 = 0$$

$$D/4 = \frac{961}{4} + 2220 = 3181$$

$$n = \frac{31 \pm \sqrt{3181}}{5} \notin \mathbb{N}$$

$$7) \quad \underline{k=-6}$$

$$(n-6)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 18n^2 + 108n - 216 = n^3 + 13n - 273$$

$$18n^2 - 95n - 57 = 0$$

$$D = 9025 + 4104 = 13129$$

$$n = \frac{95 \pm \sqrt{13129}}{36} \notin \mathbb{N}$$

$$8) \quad k = -7$$

$$(n-7)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 21n^2 + 147n - 343 = n^3 + 13n - 273$$

$$21n^2 - 134n + 70 = 0$$

$$D/4 = 4489 - 1470 = 3019$$

$$n = \frac{67 \pm \sqrt{3019}}{21} \notin \mathbb{N}$$

$$9) \quad k = -8$$

$$(n-8)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 24n^2 + 192n - 512 = n^3 + 13n - 273$$

$$24n^2 - 179n + 239 = 0$$

$$D = 32041 - 22944 = 9097$$

$$n = \frac{179 \pm \sqrt{9097}}{48} \notin \mathbb{N}$$

$$10) \quad k = -9$$

$$(n-9)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$n^3 - 27n^2 + 243n - 729 = n^3 + 13n - 273$$

$$27n^2 - 230n + 456 = 0$$

$$D/4 = 13225 - 12312 = 913$$

$$n = \frac{115 \pm \sqrt{913}}{27} \notin \mathbb{N}$$

Значит возможные n это 21 и 8, их сумма 29
 Ответ: 29.