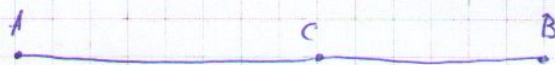


№1.



После того, как мотоциклист второй раз проехал через С, прошло 5 часов (по усл.). Тогда:

$$110 = 90 + 5a, \text{ где } a - \text{ускорение};$$

$$5a = 20;$$

$$a = 4.$$

Тогда из А в В мотоциклист ехал 3 часа. Рассчитаем его путь и скорость по формулам:

$$S = Vt + \frac{at^2}{2}; \quad V_0 = V + at$$

Имеем:

$$S = 90 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^2}{2} = 288; \quad V_0 = 90 + 4 \cdot 3 = 102$$

Рассчитаем путь из В в С (с учётом того, что он ехал 2 часа):

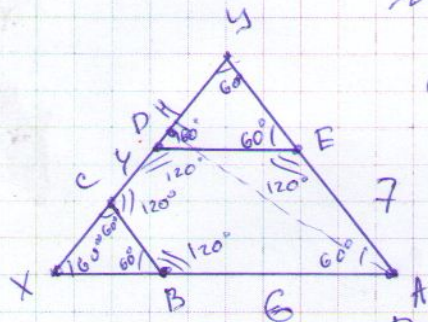
$$S_{B-C} = 102 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 2^2}{2} = 212$$

Тогда расстояние между А и С равно:

$$288 - 212 = 76$$

Ответ: 76 км

№2



Знаки ABCDE - пятиугольник

$$\angle A = 60^\circ; \angle B = \angle C = \angle D = \angle E, AB = 6, CD = 4, EA = 7$$

Найти: расстояние от А до прямой CD

Решение:

$$180 \cdot (n-2) = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E, \text{ где } n=5 \Rightarrow \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$$

Продолжим стороны AB и CD до пересечения в X, EA и CD - в Y.

$$\angle XCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \angle XBC = \angle YDE = \angle YED \text{ (все они смежные с углом в } 120^\circ)$$

$$\text{Тогда: } \angle CXB = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ = \angle DYE. \text{ Рассмотрим } \triangle XYA, \angle YXA = \angle XYA = \angle YAX = 60^\circ \Rightarrow \triangle YAX - \text{равносторонний, т.е. } XY = YA = AX$$

№ _____
На № _____

Рассмотрим $\triangle XCB$ и $\triangle DYE$. Все углы в этих треугольниках равны, значит, $\triangle XCB \sim \triangle DYE$ - равнобедренные и $XC = CB = XB = a$ и $DY = YE = DE = b$. (2)

Из (1) и (2) получаем:

$$\begin{cases} b + 7 = a + b + 4 \\ a + 6 = a + b + 4 \end{cases} \quad (CD = 4, AB = 6, EA = 7) \quad (3)$$

Решая систему (3) получаем:

$$a = XC = CB = XB = 3 \quad \text{и} \quad b = DY = YE = DE = 2 \Rightarrow XY = YA = AX = 9$$

Пусть AN - перпендикуляр на CD . Рассмотрим $\triangle ANY$, $\angle YNA = 90^\circ$, $\angle NYA = 60^\circ$, $AY = 9 \Rightarrow AN = AY \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow AN = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

№3.

$(a^{2018} + b^{2018})^{2019} \wedge (a^{2019} + b^{2019})^{2018}$. Не умаляя общности, пусть $a < b$. Тогда $p = \frac{b}{a} > 1$ и поделим обе части неравенства на $a^{2018 \cdot 2019}$. Получим:

$$(1 + p^{2018})^{2019} \wedge (1 + p^{2019})^{2018} \quad \text{Возведём обе части в степень } \frac{1}{2018 \cdot 2019}$$

$$(1 + p^{2018})^{\frac{1}{2018}} \wedge (1 + p^{2019})^{\frac{1}{2019}}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + p^x)^{\frac{1}{x}}$, где $p > 1$. Тогда:

$$f'(x) = \left((1 + p^x)^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(e^{\frac{1}{x} \ln(1 + p^x)} \right)' = (1 + p^x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{p^x \ln p}{x(1 + p^x)} - \frac{\ln(1 + p^x)}{x^2} \right) \quad (1)$$

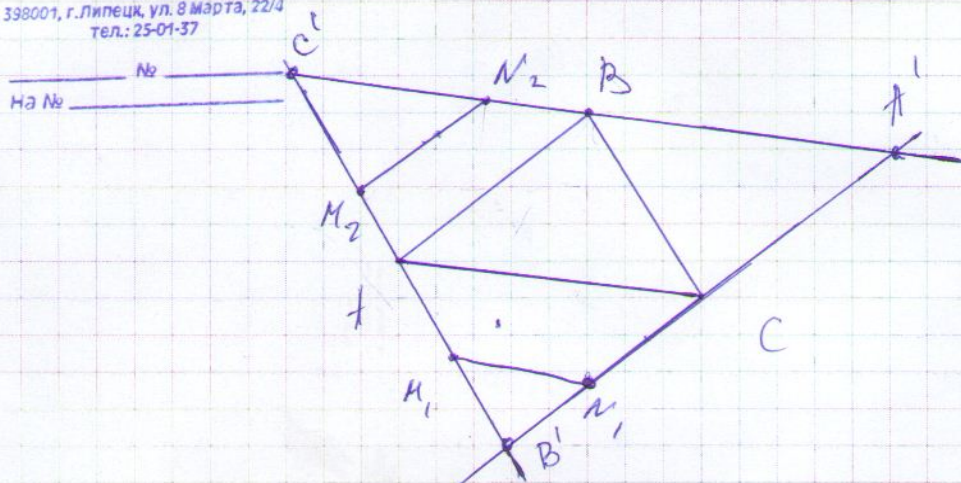
$$\frac{p^x \ln p}{x(1 + p^x)} - \frac{\ln(1 + p^x)}{x^2} = \frac{x p^x \ln p - (1 + p^x) \ln(1 + p^x)}{x^2 (1 + p^x)} = \frac{p^x \ln p - (1 + p^x) \ln(1 + p^x)}{x^2 (1 + p^x)} <$$

< 0 , т.к. $p > 1, x > 0$. Из этого следует, что (1) тоже меньше 0, т.к. первый множитель положителен. Это значит, что $f(x)$ - убывающая, и $f(2018) > f(2019)$, и т.д.

②

№4.

Пусть $S_{\triangle ABC}$ - наибольшая среди всех треугольников, $2 \leq S_{\triangle ABC} < 3$



$$\begin{aligned} B'A' &\parallel AB \\ B'C' &\parallel BC \\ A'C' &\parallel AC \end{aligned}$$

Точки D и E находятся внутри $\triangle A'B'C'$ и вне $\triangle ABC$, т.к.

1) Если D или E в $\triangle ABC$, то $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB} + S_{\triangle CDB} \geq 2 + 2 + 2 = 6$, но $2 \leq S_{\triangle ABC} < 3$

2) Если D или E вне $\triangle A'B'C'$, то (не умаляя общности, пусть E будет за прямой $A'B'$) рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABE$. Нет ли E за $A'B'$, но $h_C \leq h_E$, т.е. $S_{\triangle ABC} = h_C \cdot AB \leq h_E \cdot AB = S_{\triangle ABE}$, что противоречит выбору $\triangle ABC$

Таким образом D и E не могут лежать в одном треугольнике.

Поэтому D и E лежат в разных треугольниках. Не умаляя общности, пусть D и E лежат в $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A'B'C'$ соответственно. Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle CDE$ (не умаляя общности, пусть D и E лежат в $\triangle A'B'C'$).

3) $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle CDE} \geq 2 + 2 = 4$, противоречие, т.е.

D и E лежат в разных треугольниках. Не умаляя общности, пусть это будут $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A'B'C'$.

Лемма: $M_1M_2 \parallel AC$ и $M_1M_2 = \frac{1}{2}AC$; $M_2M_3 \parallel AB$ и $M_2M_3 = \frac{1}{2}AB$. Тогда D и E лежат выше отрезков M_1M_2 и M_2M_3 .

Док-во: Пусть, не умаляя общности, D лежит ниже M_1M_2 . Тогда $S_{\triangle ADC} = AC \cdot h_D < \frac{1}{2} h_D \cdot AC = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} < \frac{1}{2} \cdot 3 < 2$, что противоречит условию (h_D и h_C - высоты к AC), лемма доказана. (3)

Рассмотрим отрезок DE. Нетрудно видеть, что минимальная длина отрезка DE

$$равна M, M_2 = H, H + M_2 H = \frac{2}{3} BC + \frac{2}{3} BC = \frac{4}{3} BC$$

Рассмотрим $\triangle DBE$. Нетрудно видеть, что, чем ближе к M, D, тем меньше $S_{\triangle DBE}$.

(т.к. высота становится меньше при фиксированной BC). Тогда минимальная площадь достигается когда $D = M$. Но

также $S_{\triangle DBE}$ минимальна, если $E = M_2$, т.к.

высота из E к DB минимальна. Тогда:

$$EB = M_2 B = \frac{2}{3} AC, h = \frac{5}{3} h_0 \text{ (то-высота из B к AC, } h \text{ - высота из D к EB)}$$

Тогда:

$$S_{\triangle DBE} = \frac{2}{3} AC \cdot \frac{5}{3} h_0 = \frac{10}{9} AC \cdot h_0 = \frac{10}{9} S_{\triangle ABC} > S_{\triangle ABC}, \text{ что противоречит выбору } S_{\triangle ABC} \text{, как максимальной площади среди всех треугольников. Значит, ограничение } 2 \leq S_{\triangle ABC} \leq 3 \text{ неверно, н.т.р.}$$

н.б.
 $n^3 + 13n - 273 = a^3$
Рассмотрим n по mod 8

n	n^3	$13n$	$n^3 + 13n - 273$
0	0	0	7
1	1	13	5
2	0	26	1
3	3	39	1
4	0	52	3
5	5	65	5
6	0	78	5
7	7	91	1

Из таблицы видно, что a - нечётное число.

$n^3 + 13n - 3 \cdot 13 \cdot 7$, если $n \equiv 3$, то $n^3 + 13n - 273 \equiv 3$, но $n^3 + 13n - 273 \equiv 3^3 \pmod{8}$, т.е. не является кубом, значит, $n \not\equiv 3$

(4)