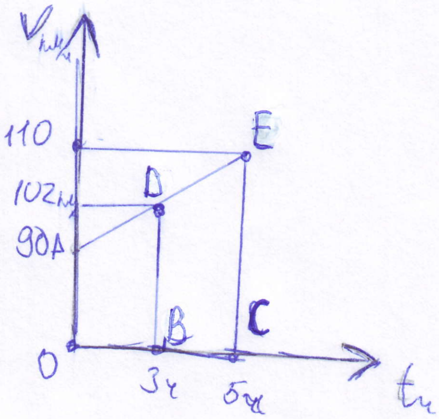
№1

Заметим что за 5 часов скорость у мотоцикл. увеличилась на $110-90=20$ (км/ч) а т.к он увеличивал ее равномерно, он увеличивал ее на $\frac{20}{5}=4$ (км/ч)

Тогда т.к он прибыл в В через 3 часа после отъезда из пункта А, скорость его на тот момент была $90+4\cdot 3=102$ (км/ч)

Построим график зависимости скорости от времени



Тогда расстояние пройденное из А в В будет равно S_{OADB} т.к это трапеция, а OB − высота.

$S_{OADB}=\frac{90+102}{2}\cdot 3=288$ (км) $\Rightarrow$ $AB=288$ км

~~А~~ т.к по пути в В он проезжал через С

$AB=AC+CB=288$ км (когда он второй раз попал в С)

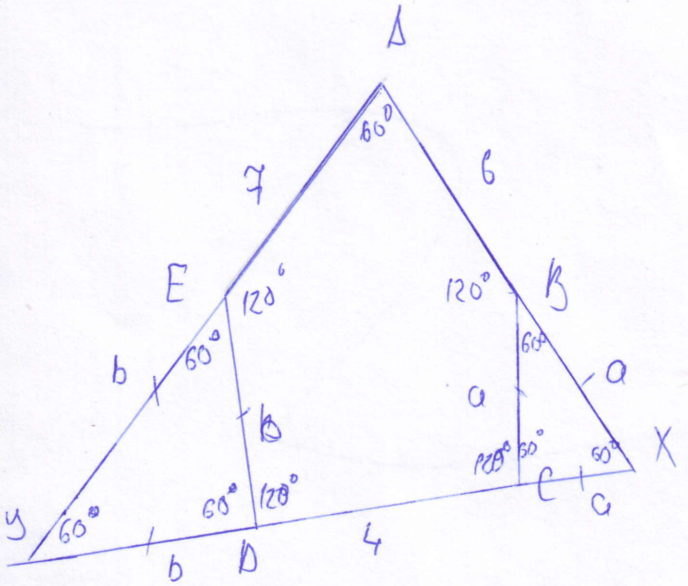
Аналогично расстояние $AB+BC$ равно $S_{OAEC}=\frac{90+110}{2}\cdot 5=500$ км

$AB+BC=AC+CB+BC$ тогда $2AB-(AB+BC)=$

$2(AC+CB)-AC-CB-BC=AC=288\cdot 2-500=76$ (км)

Ответ: 76 км

№2



Дано: ABCDE – вып.

$\angle A = 60°$ $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

$AB = 6$ $CD = 4$ $EA = 7$

Найти ρ от A до CD

Заметим что т.к сумма углов в вып. пятиугольнике равна $180 \cdot 3 = 540$ $\angle B = \angle C = \angle E = \angle D = \frac{540-60}{4} = 120°$

Тогда продлим AB и AE до пересечения с прямой CD в точках X и Y соответственно

Тогда $\angle XBC = \angle XCB = \angle YED = \angle YDE = 60°$ как внешние к углам в 120° тогда $\angle EYD = \angle BXC = 60°$ по сумме углов в $\triangle EYD$ и $\triangle BXC$ тогда $\triangle YAX$ равносторонний $\triangle CBX$ и $\triangle YED$ также равносторонние

Обозначим длину BX за a т.к $\triangle BXC$ равностор. $CX = a$

Обозначим длину EY за b т.к $\triangle EYD$ равностор $YD = b$

Тогда т.к $\triangle$ ~~ABC~~ ~~YB~~ YAX равностор.

$AY = YX \Rightarrow AE + EY = YD + DC + CX \Rightarrow 7 + b = 4 + b + a \Rightarrow$

$a = 3 \Rightarrow$ тк $AX = AB + BX = 6 + a = 9$ сторона $\triangle YAX = 9$

опустим высоту из A на YX (она же прямая CD) т.к $\triangle YAX$ равностор.

она равна $\sin 60 \cdot AX = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \Rightarrow$ ρ от A до CD $= 4{,}5 \cdot \sqrt{3}$

Чистовик лист 3 из 6

№3

Доказать, что

$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} > (a^{2019}+b^{2019})^{2018}$

для положительных a и b

Заметим что оба выражения симметричны относительно a и b тогда пусть $a \geq b$

~~Тогда~~ Заметим что тогда

$(a^{2019}+b^{2019}) \leq (a^{2018}+b^{2018})a$

т.к $(a^{2018}+b^{2018})a = a^{2019}+b^{2018}\cdot a$ и $b^{2018}\cdot a \geq b^{2019}$ т.к $a \geq b$ и числа положительные

Тогда

$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} = (a^{2018}+b^{2018})^{2018}\cdot(a^{2018}+b^{2018}) >$

$> (a^{2018}+b^{2018})^{2018}\cdot a^{2018}$ т.к $a^{2018}+b^{2018} > a^{2018}$ и числа полож.

Тогда

$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} > ((a^{2018}+b^{2018})\cdot a)^{2018}$, а

т.к $(a^{2018}+b^{2018})a \geq a^{2019}+b^{2019}$ и числа положительные

$((a^{2018}+b^{2018})\cdot a)^{2018} \geq (a^{2019}+b^{2019})^{2018} \Rightarrow$

$(a^{2018}+b^{2018})^{2019} > (a^{2019}+b^{2019})^{2018}$

ЧТД

Пусть

$n^3+13n-273=k^3$ (k - натуральное)

Рассмотрим 2 случая

1) $k>n$

$k^3-n^3=13n-273$

$(k-n)(k^2+kn+n^2)=13n-273$

$k-n$ - натуральное

$k^2>n^2$

$kn>n^2$

$n^2=n^2$

~~Тогда~~

$(k-n)(k^2+kn+n^2)$ ~~...~~

Тогда ~~при ...~~ т.к kn хотя бы $(k+1)n$ и k^2 хотя бы $(n+1)(n+1)$

при $n\geq 4$ $k^2+kn+n^2>13n$ т.к $k^2\geq 5n$ $kn\geq 5n$ $n^2\geq 4n$

Но т.к $k-n$ - натуральные, а

$(k-n)(k^2+kn+n^2)=13n-273<13n$

При $n\geq 4$ решений не имеет. Рассмотрим значения 1,2,3

Теперь заметим что при $n=1,2,3$ выражение

$n^3+13n-273$ принимает отриц. значения $\Rightarrow$ не явл кубом натурального числа $\Rightarrow$ решений при $k>n$ нет.

2) $n > k$

$\Downarrow$

$n^3 \geq k^3$

$n^3 + 13n - 273 = k^3$

т.к $n^3 \geq k^3$

$13n - 273 \leq 0$, а т.к $n \in N$

$13(n-21) \leq 0$ $n \leq 21$ Рассмотрим все $n \leq 21$ и > 3 т.к их уже рассмотрели

$n=21$ подходит получаем пара $n=21$ $k=21$

$n=20$

(т.к $20^3 - 19^3 = 20^2 + 19^2 + 20 \cdot 19 > 13 \cdot 1$)

$20^3 + 13(20-21) > 19^3$ и $< 20^3$ $\Rightarrow$ натурально k не найдется

$n=19$ (т.к $k^3 < n^3$) т.к кубы последоват.

$19^3 + 13(19-21) > 18^3$ и $< 19^3$ $\Rightarrow$ решений нет

(т.к $19^3 - 18^3 = 19^2 + 18^2 + 18 \cdot 19 > 13 \cdot 2$)

$n = 18$

$18^3 + 13(18-21) > 17^3$ и $< 18^3$

Аналогично проверяя по формуле для двух послед. кубов разности

$(n+1)^3 - n^3 = (n+1)^2 + (n+1)n + n^2$ поймем что для $n \geq 9$ решений нет т.к разность между соседними кубами больше числа, которое мы вычитаем из n^3

При $n=8$

$8^3 + 13(8-21) = 64 \cdot 8 - 13 \cdot 13 = 512 - 169 = 343 = 7^3$ $\Rightarrow$ $n=8$ подходит

$n=7$

$7^3 - 13 \cdot 14 = 343 - 182 = 161$ не куб

$n=6$

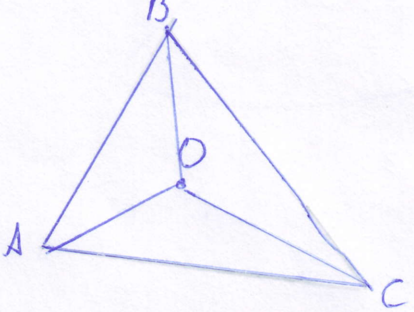
$6^3 - 13 \cdot 15 = 216 - 195 = 19$ не куб

При $n=5$ и $n=4$ $n^3 + 13n - 273$ - отрицательное $\Rightarrow$ подходят только $n=21$ и $n=8$ их сумма 29.

Ответ: 29.

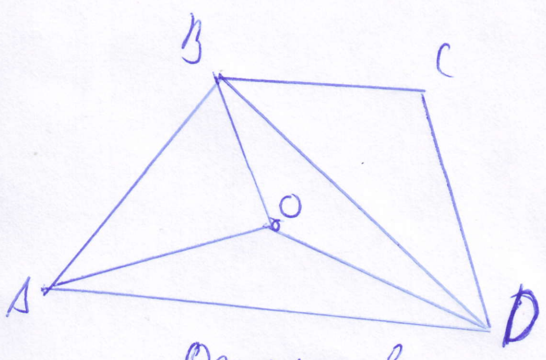
Рассмотрим выпуклую оболочку этих пяти точек

1) Если это ~~в~~ треугольник то внутри него находятся 2 точки (не на стороне т.к любые 3 образуют Δ) $\Rightarrow S$
Возьмем одну из них: O и выпуклую оболочку ΔABC



Заметим что $S_{\Delta OB} \geq 2$
$S_{BOC} \geq 2$ и $S_{BOC} \geq 2$ и т.к
$S_{ABC} = S_{\Delta OB} + S_{BOC} + S_{BOC}$
$S_{ABC} \geq 6 \Rightarrow S$ можем выделить ΔABC

2) Если это четырехугольник проведем внутреннюю диагональ (можем т.к выпуклая фигура)
~~Это~~ Четырехугольник разобьется на два треугольника, в один из которых попадет оставшаяся 5-ая точка
Тогда его площадь также ≥ 6 из 1)-го случая $\Rightarrow S$ можем выбрать его.



Остался вариант с выпуклой оболочкой пятиугольником