Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 8 класса

1) Скорость машин на первой дороге 36 км/ч = 10 м/с. Расстояние между машинами 30 м. Значит, через некоторый участок проходит 1/3 машины в секунду. На второй дороге скорость 15 м/с, через участок на ней в секунду проходит 1/2 машины. Получается, что на третью дорогу в секунду въезжает в среднем $1/3 + 1/2 = 5/6$ машины. Скорость на ней 20 м/с. Отсюда расстояние между машинами

$$\frac{20}{\frac{5}{6}} = 24 \text{ м}.$$

Ответ: 24 м.

Критерии оценивания:

- Найдено, сколько машин проходит в секунду по первой и второй дорогам — 3 балла.
- Найдено, сколько машин проходит по третьей дороге — 4 балла.
- Ответ — 3 балла.

2) Рычаг находится в равновесии, если в аквариуме нет воды. По правилу рычага:

$$L_1 m_1 g = L_2 m_2 g + L_2 m_3 g,$$

где L_1 и L_2 — длины левого и правого плеч рычага.
Поделим обе части уравнения на g и на L_2:

$$\frac{L_1}{L_2} m_1 = m_2 + m_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_1}{L_2} V_1 \rho_1 = V_2 \rho_2 + V_3 \rho_3. \qquad (1)$$

Если наполнить аквариум водой, к моментам силы тяжести добавятся моменты силы Архимеда. Рычаг останется в равновесии, следовательно, эти моменты равны.

$$L_1 F_{\text{Арх}_1} = L_2 F_{\text{Арх}_3} \quad \Rightarrow \quad L_1 V_1 \rho_{\text{ж}} g = L_2 V_3 \rho_{\text{ж}} \quad \Rightarrow \quad L_1 V_1 = L_2 V_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{V_3}{V_1}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

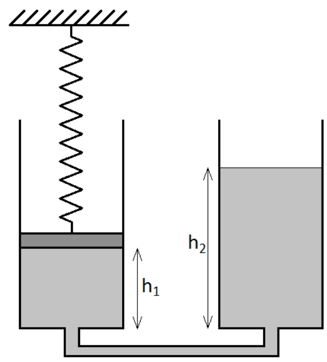
$$\frac{V_3}{V_1} V_1 \rho_1 = V_2 \rho_2 + V_3 \rho_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 \rho_1 = V_2 \rho_2 + V_3 \rho_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 = V_2 \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_3} \quad \Rightarrow \quad V_3 = 30 \text{ см}^2.$$

Ответ: 30 см^2.

Критерии оценивания:

- Записано равенство моментов для аквариума без воды — 1 балл.
- Записано равенство моментов для аквариума с водой (для всех сил или только сил Архимеда) — 2 балла.
- Найдено отношение L_1 и L_2 — 3 балла.
- Ответ — 4 балла.

3) Обозначим высоту в левом колене h_1, а в правом h_2.
Давление слева равно сумме давлений водяного столба $\rho \cdot g \cdot h_1$, атмосферного давления $P_{\text{атм}}$ и давления, создаваемого пружиной kh_1/S (h_1 равно деформации пружины); а давление справа — сумма давлений водяного столба и атмосферы. При этом давления у дна слева и справа равны:



$$\frac{k \cdot h_1}{S} + \rho \cdot g \cdot h_1 + P_{\text{атм}} = \rho \cdot g \cdot h_2 + P_{\text{атм}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k \cdot h_1}{S} + \rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot h_2. \qquad (1)$$

Объём жидкости выразим через h_1 и h_2:

$$V = S \cdot (h_1 + h_2). \tag{2}$$

Изначально $V = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3, $h_1 = 0{,}15$ м, $S = 0{,}01$ м^2, $\rho = 1000$ кг/м^3.

$$h_2 = \frac{V - Sh_1}{S} \quad \Rightarrow \quad h_2 = 0{,}3 \text{ м}.$$

Рассмотрим уравнение (1):

$$\frac{k \cdot h_1}{S} + \rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \cdot S}{h_1} = 100 \ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

По определению плотности:

$$\rho = \frac{m_{\text{воды}} + m_{\text{соли}}}{V}, \tag{3}$$

где $m_{\text{воды}} = 4{,}5$ кг — масса воды, $m_{\text{соли}} = 0{,}46$ кг — масса соли (в данный момент).

Выражения (1) и (2) остаются в силе, но изменились h_1, h_2, V и ρ. Обозначим новые величины h_1', h_2', V' и ρ'. По условию $h_1' = 0{,}16$ м. Запишем уравнения (1–3) и решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{kh_1'}{S} + \rho' g h_1' = \rho' g h_2', \\ V' = S(h_1' + h_2'), \\ \rho' = \dfrac{m_{\text{соли}} + m_{\text{воды}}}{V'}. \end{cases} \tag{4}$$

Из первого и второго уравнений выразим h_2' и V' через ρ' и подставим в третье:

$$\begin{cases} h_2' = \dfrac{\frac{kh_1'}{S} + \rho' g h_1'}{\rho' g} \\ V' = Sh_1' \left(1 + \dfrac{\frac{k}{S} + \rho' g}{\rho' g}\right) \\ \rho' = \dfrac{(m_{\text{воды}} + m_{\text{соли}})g - kh_1'}{2gSh_1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \rho' = 1050 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

По условию,

$$\rho = \rho_0 + c \cdot m_{\text{соли}}. \tag{5}$$

Подставляя ρ' в формулу (5), находим $c = 50/0{,}46 \approx 109$ м$^{-3}$.

Далее в воду добавили ещё 920 грамм соли. Все выражения остаются верными, но вновь изменились h_1, h_2, V и ρ. Обозначим новые величины, как h_1'', h_2'', V'', ρ''.

Масса соли увеличилась, $m_{\text{соли}} = 0{,}46 + 0{,}92 = 1{,}38$ кг. По формуле (3) находим $\rho'' = 1150$ кг/м^3.

Решая систему (4), находим $h_1'' \approx 0{,}18$ м $= 18$ см.

Ответ: 18 см.

Критерии оценивания:

- Написано равенство давлений в левом и правом колене — 2 балла.
- Найдена жёсткость пружины — 2 балла.
- Записаны выражения, связывающие объём воды, массу соли и плотность раствора — 2 балла.
- Найден коэффициент с — 2 балла.
- Ответ — 2 балла.

4) В начале движения тело обладает кинетической энергией $E_{\text{к}} = mV^2/2 = 64$ Дж. Тело останавливается на высоте 2 м и приобретает потенциальную энергию $E_{\text{п}} = mgh = 40$ Дж. Изменение механической энергии равно работе силы трения: $E_{\text{к}} + A_{\text{тр}} = E_{\text{п}}$, где $A_{\text{тр}} = -24$ Дж — работа силы трения.

Рассмотрим спуск тела. Трение совершает такую же работу: величина силы не зависит от направления, а перемещение одинаково. В конце спуска кинетическая энергия равна:

$$E_{\text{к}_2} = E_{\text{п}} + A_{\text{тр}} = 40 \text{ Дж} + (-24 \text{ Дж}) = 16 \text{ Дж}.$$

Осталось найти конечную скорость тела:

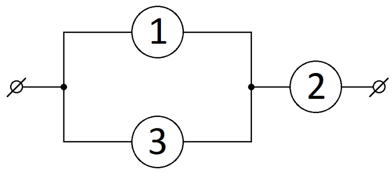
$$\frac{mV_2^2}{2} = E_к \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2E_к}{m}} = 4 \ \frac{м}{с}.$$

Ответ: 4 м/с.

Критерии оценивания:

- Записан закон сохранения энергии — 2 балла.
- Найдена работа силы трения — 2 балла.
- Показано, что при движении вниз работа силы трения будет такой же — 2 балла.
- Найдена кинетическая тела в конце спуска — 2 балла.
- Ответ — 2 балла.

5) На элементах 1 и 3 одинаковое напряжение, следовательно, силы тока в них равны.
Сила тока в элементе 2 равна сумме сил тока в элементах 1 и 3:



$$I_2 = I_1 + I_3 = 2 \cdot I_1. \tag{1}$$

На цепь подано напряжение 300 В:

$$U_1 + U_2 = 300 \text{ В}. \tag{2}$$

Найдём на графике пару точек, удовлетворяющим соотношениям (1) и (2):

$$U_1 = 130 \ B, \quad I_1 = 1 \ A;$$
$$U_2 = 170 \ B, \quad I_2 = 2 \ A.$$

Электрическая мощность равна произведению силы тока и напряжения:

$$P_1 = I_1 U_1 = 130 \text{ Вт},$$
$$P_2 = I_2 U_2 = 340 \text{ Вт},$$
$$P_3 = I_3 U_3 = 130 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_1 = 130$ Вт, $P_2 = 340$ Вт, $P_3 = 130$ Вт.

Критерии оценивания:

- Найдено соотношение между силами токов — 1 балл.
- Найдено соотношение между напряжениями — 2 балла.
- По графику определены значения тока и напряжения — 5 баллов.
- Ответ — 2 балла.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

1) Найдём первую точку, в которой скорость тела равна нулю. Изменение кинетической энергии тела равно работе действующих на него сил. В начале кинетическая энергия тела $mV^2/2$, а в конце 0. То есть:

$$0 - \frac{mV^2}{2} = A.$$

При этом работу совершают две силы — сила упругости и сила трения:

$$A_{F_{\text{упр}}} = -\frac{kL_1^2}{2}, \qquad A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}}L_1,$$

где L_1 — расстояние от точки равновесия до точки остановки тела. Так как тело не двигается по вертикали, $N = mg$ и $F_{\text{тр}} = N\mu = mg\mu$, где N — реакция опоры, μ — коэффициент трения. Уравнение изменения энергии тела:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{kL_1^2}{2} + mg\mu L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{2}L_1^2 + mg\mu L_1 - \frac{mV^2}{2} = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно L_1. Из него находим:

$$L_1 = \frac{-mg\mu \pm \sqrt{(mg\mu)^2 + kmV^2}}{k}.$$

Отрицательный корень не подходит, остаётся положительный:

$$L_1 = \frac{-mg\mu + \sqrt{(mg\mu)^2 + kmV^2}}{k} = \frac{25}{112{,}5}\ \text{м} \approx 22{,}2\ \text{см}.$$

Скорость тела будет нулевой, однако, это не значит, что оно окончательно остановилось. На него действует сила упругости пружины. Проверим, больше ли она максимальной возможной силы трения покоя:

$$\left.\begin{array}{r} F_{\text{тр}_{max}} = mg\mu = 10\ \text{Н} \\ F_{\text{упр}} = kL_1 = 25\ \text{Н} \end{array}\right| \Rightarrow \quad F_{\text{упр}} > F_{\text{тр}_{max}}.$$

Значит, тело не остановилось окончательно, а начало двигаться обратно. Найдём следующую точку, в которой его скорость стала нулевой. Пусть эта точка удалена от начального положения на расстояние L_2. Примем L_2 положительным, если оно лежит в направлении первоначального толчка, и отрицательным, если в противоположном.

Так как и в начале, и в конце этого этапа движения кинетическая энергия нулевая, сумма работ силы трения и силы упругости равна 0:

$$\begin{cases} A_{F_{\text{упр}}} + A_{F_{\text{тр}}} = 0 \\ A_{F_{\text{упр}}} = \dfrac{kL_1^2}{2} - \dfrac{kL_2^2}{2} \\ A_{F_{\text{тр}}} = -mg\mu(L_1 - L_2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2}(L_1^2 - L_2^2) = mg\mu(L_1 - L_2).$$

По формуле разности квадратов $L_1^2 - L_2^2 = (L_1 - L_2)(L_1 + L_2)$. Поэтому:

$$\frac{k}{2}(L_1 + L_2) = mg\mu \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{2mg\mu}{k} - L_1 = -\frac{5}{112{,}5}\ \text{м} \approx -4{,}4\ \text{см}.$$

На таком расстоянии от начального положения скорость тела второй раз станет нулевой. Проверим, что теперь будет больше — максимально возможная сила трения покоя или сила упругости:

$$\left.\begin{array}{r} F_{\text{тр}_{max}} = mg\mu = 10\ \text{Н} \\ |F_{\text{упр}}| = kL_2 = 25\ \text{Н} \end{array}\right| \Rightarrow \quad F_{\text{упр}} < F_{\text{тр}_{max}}.$$

Сила трения больше, а значит, сила упругости не сможет сдвинуть тело с места. В этом положении тело остановилось.

Ответ: тело остановится в 4,4 см от начального положения.

Критерии оценивания:

- Сформулировано, что изменение кинетической энергии равно работе — 3 балла.
- Составлено уравнение для нахождения L_1 — 2 балла.
- Найдено L_1 — 2 балла.
- Показано, что тело остановится, только если сила трения превзойдёт силу упругости — 1 балл.
- Составлено уравнение для нахождения L_2 — 1 балл.
- Ответ — 1 балл.

2) Покажем, что задачу невозможно решить, если не даны максимальная скорость V_{max}, ускорение a и расстояние l. Для этого рассмотрим два возможных случая и покажем, что ответ будет различён.

Случай 1: максимальная скорость достигается машиной, когда пройденное ей расстояние больше $2l$.

Рассмотрим положение машин через большой промежуток времени T от старта (считаем, что к этому моменту все машины достигнут максимальных скоростей):

$$L_1 = \frac{at_0^2}{2} + v_{max}(T - t_0),$$
$$L_2 = \frac{at_0^2}{2} + v_{max}(T - t_0 - t_2),$$
$$L_3 = \frac{at_0^2}{2} + v_{max}(T - t_0 - t_3),$$

где t_0 — время разгона машин, t_2 — время старта второй, t_3 — время старта третьей. Тогда дистанции между машинами:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 - L_2 = v_{max}t_2 \\ L_2 - L_3 = v_{max}(t_3 - t_2) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{L_1 - L_2}{L_2 - L_3} = \frac{t_2}{t_3 - t_2}.$$

При этом, так как на протяжении всех $2l$ первая машина двигалась равноускоренно:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{at_2^2}{2} = l \Rightarrow t_2 = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} \\ \dfrac{at_3^2}{2} = 2l \Rightarrow t_3 = \sqrt{\dfrac{4l}{a}} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{L_1 - L_2}{L_2 - L_3} = \frac{t_2}{t_3 - t_2} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Случай 2: максимальная скорость достигается в момент, когда машина прошла расстояние l.

Заметим, что выражение

$$\frac{L_1 - L_2}{L_2 - L_3} = \frac{t_2}{t_3 - t_2}$$

остаётся в силе, на его вывод не влияет точка достижения максимальной скорости. Однако, соотношение t_2 и t_3 теперь станет иным. Для старта второй машины по-прежнему:

$$\frac{at_2^2}{2} = l \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

А вот вторую часть пути машина уже будет ехать с постоянной скоростью $V_{max} = at_2$. То есть:

$$l = at_2(t_3 - t_2) \quad \Rightarrow \quad t_3 - t_2 = \frac{l}{at_2} = \frac{at_2^2}{2at_2} = \frac{t_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_1 - L_2}{L_2 - L_3} = \frac{t_2}{t_3 - t_2} = 2 \neq \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Таким образом, мы проиллюстрировали, что при различных соотношениях максимальной скорости, ускорения и расстояния l получаются разные соотношения дистанций между машинами. Следовательно, при имеющихся данных задачу решить невозможно.

Ответ: задачу решить невозможно.

Критерии оценивания:

- Показано, что отношение дистанций равно отношению промежутков времени между моментами старта — 4 балла.
- Дан ответ для одного из случаев — 3 балла.
- Показано, что в разных случаях ответ будет различён — 3 балла.

3) Во время нагревания кастрюля была закрыта крышкой, вода не испарялась. Полученная энергия тратилась только на нагревание воды. В начальный момент теплопотерь не было, так как температура воды была равна температуре окружающего воздуха:

$$P = cm\frac{\Delta T_0}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{cm} = \frac{\Delta T_0}{\Delta t},$$

где P — мощность кипятильника, c — удельная теплоёмкость воды, m — её масса, Δt — промежуток времени, ΔT — изменение температуры за это время. Проведя касательную к графику $T(t)$ в начальный момент, найдём скорость изменения температуры $\Delta T_0/\Delta t$:

$$\frac{P}{cm} = \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = \frac{1}{4}\ \frac{^\circ\text{C}}{\text{сек}}. \tag{1}$$

По мере нагревания воды теплопотери увеличивались (график становится более пологим). Пусть теплопотери равны P_1 при 100°C. На нагревание воды тратится $P - P_1$:

$$P - P_1 = cm\frac{\Delta T_1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{P - P_1}{cm} = \frac{\Delta T_1}{\Delta t}.$$

Проведя касательную к графику в точке, в которой вода достигла температуры 100°C, найдём скорость изменения температуры $\Delta T_1/\Delta t$ непосредственно перед началом кипения:

$$\frac{P - P_1}{cm} = \frac{\Delta T_1}{\Delta t} = \frac{1}{16}\ \frac{^\circ\text{C}}{\text{сек}}. \tag{2}$$

Разделив (2) на (1), найдём отношение теплотерь к мощности кипятильника:

$$\frac{P - P_1}{P} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P} = \frac{3}{4}.$$

После начала кипения в кастрюлю положили ещё два кипятильника. Далее температура воды постоянна, а значит, постоянны и теплопотери. Поэтому мощность, которая тратится на кипение воды, равна $3P - P_1 = 3P - 3P/4 = 9P/4$. Запишем уравнение теплового баланса для процесса кипения:

$$\frac{9}{4}P\Delta t_2 = 0{,}05Lm, \tag{3}$$

где m — масса воды, L — удельная теплота парообразования, Δt_2 — время, за которое выкипит 5% воды (то, что нужно найти). Снова запишем уравнение теплового баланса для начальной ситуации:

$$P\Delta t_0 = cm\Delta T, \tag{4}$$

где ΔT — изменение температуры за промежуток времени Δt_0.
Разделим (3) на (4):

$$\frac{9}{4}\frac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \frac{0{,}05L}{c\Delta T} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{4}{9}\frac{0{,}05L}{c} : \frac{\Delta T}{\Delta t_0} \approx 48 \text{ сек.}$$

Ответ: 48 сек.

Критерии оценивания:

- Написано уравнение теплового баланса для нагревания при комнатной температуре. Сформулирована идея об отсутствии потерь в начале нагревания — 2 балла.
- Написано уравнение теплового баланса в момент непосредственно перед началом кипения — 1 балл.
- Найдено отношение $\frac{P-P_1}{P}$ — 1 балл.
- Найдена новая эффективная мощность ($3P - P_1$) при добавлении ещё двух кипятильников — 2 балла.
- Записано уравнение теплового баланса для процесса кипения — 2 балла.
- Ответ — 2 балла.

Примечание. Полный балл ставится, если различие между правильным и полученным ответом обусловлено только неточностью проведения касательных.

4) Заметим, что электрическая схема симметрична (рис. 1).
Напряжение между симметричными точками равно нулю, в том числе равно нулю напряжение между A и B. Следовательно, ток по нижним левым резисторам не течёт, и их можно исключить из схемы (рис. 2).
В цепи можно выделить участки из трёх последовательных резисторов. Перерисуем схему (рис. 3).
На участках CD и CF параллельно подключены сопротивления по 3 и 1 Ом (рис. 4):

$$R_{CD} = R_{CF} = \frac{3 \cdot 1}{3+1}\ \text{Ом} = 0{,}75\ \text{Ом}.$$

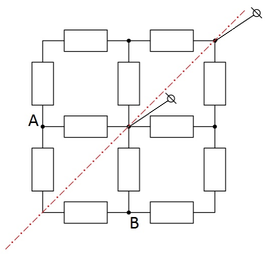


Рис. 1

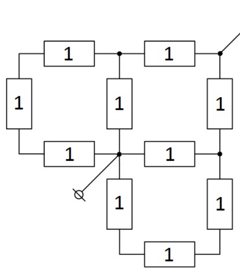


Рис. 2

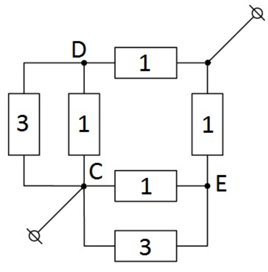


Рис. 3

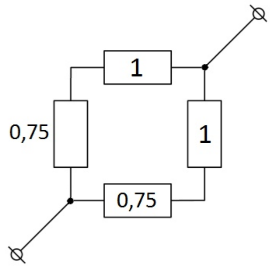


Рис. 4

Эта схема эквивалента двум параллельно подключённым сопротивлениям по 1,75 Ом. Общее сопротивление цепи:

$$R_{\text{общее}} = \frac{1{,}75}{2} = 0{,}875\ \text{Ом}.$$

Ответ: 0,75 Ом.

Критерии оценивания:

- Соображение о симметричности цепи — 2 балла.
- Соображение об отсутствии тока по двум из резисторов — 2 балла.
- Правильно построенная эквивалентная схема — 3 балла.
- Ответ — 3 балла.

5) Так как нить нерастяжима и не проскальзывает по блоку, модули скоростей и ускорений грузов связаны следующими соотношениями:

$$V_1 = V_2 = V_3\frac{r}{l}, \qquad a_1 = a_2 = a_{\tau 3}\frac{r}{l},$$

где $a_{\tau 3}$ — тангенциальное (касательное) ускорение груза m_3.
Найдём ускорение тела m_3 в начальный момент. Сделать это можно двумя способами.

Способ 1

Пусть тело m_3 движется с ускорением a, тела m_1 и m_2 движутся с одинаковыми по модулю ускорениями ar/l. Запишем второй закон Ньютона для каждого из этих тел:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = -m_1 a\dfrac{r}{l}, \\ m_2 g - T_2 = m_2 a\dfrac{r}{l}, \\ m_3 g - F = m_3 a, \end{cases} \tag{1}$$

где T_1 — сила натяжения левой части нити, T_2 — сила натяжения правой части нити, F — сила, с которой стержень действует на тело m_3 (считаем положительной, если направлена вверх).
Сумма моментов всех действующих на блок сил равна 0:

$$Fl + T_2 r - T_1 r = 0. \tag{2}$$

Здесь F — сила, с которой груз m_3 тянет стержень. По третьему закону Ньютона она равна силе, с которой стержень действует на груз.

Из системы (1) выразим эти силы через известные нам величины и ускорение a:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g + m_1 a \dfrac{r}{l}, \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \dfrac{r}{l}, \\ F = m_3 g - m_3 a. \end{cases} \tag{3}$$

Подставим (3) в (2) и выразим ускорение:

$$(m_3 g - m_3 a)l + \left(m_2 g - m_2 a\frac{r}{l}\right) r - \left(m_1 g + m_1 a\frac{r}{l}\right) r = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m_3 gl + m_2 gr - m_1 gr = a\left(m_3 l + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l}\right) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_3 gl + m_2 gr - m_1 gr}{m_3 l + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l}}. \tag{4}$$

Подставляя данные из условия, находим $a = 0{,}275^{-1}$ м/с$^2 \approx 3{,}6$ м/с^2.

Способ 2

Пусть a — ускорение тела m_3, $a\frac{r}{l}$ — ускорения тел m_1 и m_2. Рассмотрим момент через небольшой промежуток времени dt после начала движения. Запишем закон сохранения энергии.

$$\frac{\left(m_3 + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l^2}\right) V^2}{2} + (m_1 - m_2) gh \frac{r}{l} - m_3 gh = 0.$$

Подставим $V = a \cdot dt$, $h = a \cdot dt^2/2$:

$$\frac{\left(m_3 + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l^2}\right) \cdot a^2 \cdot dt^2}{2} + \frac{(m_1 - m_2) \cdot g \cdot a \cdot dt^2}{2}\frac{r}{l} - \frac{m_3 \cdot g \cdot a \cdot dt^2}{2} = 0.$$

Сократим на $a \cdot dt^2/2$:

$$\left(m_3 + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l^2}\right) a + (m_1 - m_2) g\frac{r}{l} - m_3 g = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_3 g + (m_2 - m_1) g\frac{r}{l}}{m_3 + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l}} \approx 3{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \tag{5}$$

Результат такой же, как в первом способе, формулы (4) и (5) тождественны.

Теперь рассмотрим систему в момент, когда тело m_3 находится в нижней точке траектории. Так как нить не проскальзывает, а блок повернулся на четверть оборота, высоты тел m_1 и m_2 изменились на $\pi r/2$. Скорости тел m_1 и m_2 равны Vr/l, где V — скорость третьего тела. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{(m_1 + m_2)V^2}{2}\frac{r^2}{l^2} + \frac{m_3 V^2}{2} + m_1 g\frac{\pi r}{2} - m_2 g\frac{\pi r}{2} - m_3 gl = 0 \quad \Rightarrow \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad V^2 = \frac{2\left(m_3 gl + (m_2 - m_1) g\frac{\pi r}{2}\right)}{(m_1 + m_2)\frac{r^2}{l^2} + m_3} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2(m_3 gl + (m_2 - m_1) g\frac{\pi r}{2})}{(m_1 + m_2)\frac{r^2}{l^2} + m_3}}.$$

Подставляя данные из условия, находим

$$V = \sqrt{\frac{64 - 4\pi}{11}} \approx 1{,}12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Зная скорость тела m_3 в нижней точке траектории, найдём нормальное (центростремительное) ускорение $a_n = V^2/l \approx 3{,}12$ м/с^2.

Для нахождения тангенциального (направленного по касательной к окружности) ускорения напишем такую же систему, как при поиске ускорения в начальный момент:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = -m_1 a\dfrac{r}{l} \\ m_2 g - T_2 = m_2 a\dfrac{r}{l} \\ F = m_3 a \end{cases}$$

При этом сумма моментов сил равна нулю:

$$T_2 r - T_1 r - Fl = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(m_2 g - m_2 a\frac{r}{l}\right) r - \left(m_1 g + m_1 a\frac{r}{l}\right) r - m_3 a l = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(m_2 g - m_1 g) r}{m_3 l + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l}}.$$

Подставляя данные из условия, находим $a_\tau \approx -3{,}6$ м/с^2, где знак «$-$» обозначает, что ускорение направлено вправо. Полное ускорение груза m_3 в нижней точке найдём по теореме Пифагора, складывая вектора нормального и тангенциального ускорения:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \approx 4{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Для нахождения начальной скорости, необходимой для достижения телом m_3 верхней точки воспользуемся законом сохранения энергии. При этом заметим, что возможны два случая:

А) Блок совершил три четверти оборота, не меняя направления своего вращения.

Б) Блок повернулся меньше, чем на три четверти оборота, после чего стал вращаться в противоположном направлении, проскочил мимо начального положения и повернулся ещё на четверть оборота.

Изменение потенциальной энергии третьего тела в обоих случаях одинаково, но в первом случае тело m_1 поднялось, а тело m_2 опустилось, а во втором случае — наоборот. Так как $m_2 < m_1$, во втором случае требуется меньше затрат энергии, а значит, и меньшая начальная скорость. Так как нас интересует только минимальная начальная скорость, именно второй случай и будем рассматривать. Начальная скорость минимальна, значит, скорость тела m_3 в верхней точке будет равна 0:

$$\frac{m_3 V_0^2}{2} + \frac{(m_1 + m_2) V_0^2}{2}\frac{r^2}{l^2} = m_3 g l + (m_2 - m_1) g \frac{\pi r}{2} \quad \Rightarrow \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad V_0^2 = \frac{2\left(m_3 g l + (m_2 - m_1) g \frac{\pi r}{2}\right)}{m_3 + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l^2}} \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{\frac{2\left(m_3 g l + (m_2 - m_1) g \frac{\pi r}{2}\right)}{m_3 + (m_1 + m_2)\frac{r^2}{l^2}}}.$$

Подставляя данные из условия, находим $V_0 \approx 1{,}12$ м/с.

Заметим, что вид закона сохранения энергии в формуле (7) полностью аналогичен ему же в формуле (6). Действительно, разница потенциальной энергии для каждого из тел в обоих случаях одинакова, а значит, одинаковы и разницы их кинетических энергий.

Ответ: ускорение тела m_3 в начальный момент $a_0 = 3{,}6$ м/с^2. Скорость тела в нижней точке $V = 1{,}12$ м/с. Ускорение тела в нижней точке $a = 4{,}8$ м/с^2. Минимальная скорость, необходимая для достижения третьим телом верхней точки траектории $V_0 = 1{,}12$ м/с.

Критерии оценивания:

- Найдено соотношение скоростей и ускорений для m_1 m_2 m_3 — 1 балл.
- Написан второй закон Ньютона для трёх тел в начальный момент времени — 1 балл.
- Написано уравнение моментов сил для блока в начальный момент времени — 2 балла.
- Вычислено ускорение тела m_3 в начальный момент — 1 балл.
- Записан закон сохранения энергии для вычисления скорости в нижней точке траектории — 1 балл.
- Вычислена скорость в нижней точке траектории — 1 балл.
- Вычислено тангенциальное ускорение в нижней точке — 1 балл.
- Вычислено нормальное (центростремительное) ускорение — 1 балл.
- Вычислена скорость, необходимая для достижения верхней точки — 1 балл.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

1) Давление над жидкостью равно давлению насыщенных паров при данной температуре, значит, жидкость находится в точке кипения. То есть температура не повышается, всё выделяемое тепло тратится только на два процесса — испарение воды и подъём поршня. Так как мощность нагревателя постоянна, увеличение объёма пара и подъём поршня происходят с постоянной скоростью, а значит

$$P_0S + mg = PS \quad \Rightarrow \quad P = const,$$

где P_0 — атмосферное давление, S — площадь поршня.
Запишем уравнение теплового баланса и выразим из него КПД системы:

$$\begin{cases} Q = A + \Delta U \\ \Delta U = L\Delta m \\ A = P\Delta V \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{A}{Q} = \frac{P\Delta V}{P\Delta V + L\Delta m}.$$

Теперь запишем закон Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Так как $P = const$ и $T = const$:

$$P\Delta V = \frac{\Delta m}{\mu}RT \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{\mu}{RT}P\Delta V.$$

Подставим выражение для Δm в уравнение для нахождения КПД:

$$\eta = \frac{P\Delta V}{P\Delta V + L\cdot P\Delta V\frac{\mu}{RT}} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{P\Delta V}{P\Delta V\left(1 + \frac{L\mu}{RT}\right)} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{1}{1 + \frac{L\mu}{RT}}.$$

Ответ: $\eta = \left(1 + \frac{L\mu}{RT}\right)^{-1}$.
Критерии оценивания:
- Соображение о постоянстве температуры и давления — 2 балла.
- Уравнение теплового баланса — 2 балла.
- Закон Менделеева-Клапейрона. Связь Δm и ΔV — 3 балла.
- Ответ — 3 балла.

Примечание. Многие участники посчитали, что $\eta = A/\Delta U$, то есть нашли отношение полезных затрат к бесполезным, а не ко всем (ответ получался $\eta = RT/L\mu$). В этом случае (при отсутствии других ошибок) решение оценивалось в 8 баллов.

2) Рассмотрим движение с отключённым двигателем. При таком движении единственная непотенциальная сила, действующая на космический аппарат — сила сопротивления среды. Совершённая ей работа равна изменению механической энергии тела:

$$E_{\text{п}1} + E_{\text{к}1} + A_F = E_{\text{п}2} + E_{\text{к}2}.$$

Посчитаем, как меняется полная энергия корабля при изменении радиуса орбиты на $\Delta h << R$. Так как изменение радиуса орбиты за один оборот невелико по сравнению с самим радиусом, можно считать, что корабль движется по окружности вокруг центра планеты; а значит, имеет постоянное ускорение, равное $a = v^2/r$. Это ускорение создаётся силой всемирного тяготения, и по второму закону Ньютона:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{r} \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{GMm}{2r}.$$

Гравитационная потенциальная энергия находится по формуле: $E_п = -GM/r$. Поэтому полная механическая энергия аппарата:

$$E = E_к + E_п = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}.$$

При незначительном изменении высоты полёта скорость тела также меняется незначительно, поэтому работа сил сопротивления:

$$A_F = -k_r vl = -k_r v^2 t = -k_r \frac{GM}{r} t,$$

где k_r — коэффициент пропорциональности между скоростью и силой сопротивления среды, зависящий от концентрации частиц на данной высоте. Так как работа силы сопротивления равна изменению полной механической энергии тела:

$$-\frac{GMm}{2r} - k_r \frac{GM}{r} t = -\frac{GMm}{2(r - \Delta h)} \quad \Rightarrow \quad k_r \frac{GM}{r} t = \frac{GMm}{2(r - \Delta h)} - \frac{GMm}{2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{k_r}{r} t = m \frac{r - (r - \Delta h)}{2r(r - \Delta h)}.$$

Так как $\Delta h \ll r$, то $(r - \Delta h) r \approx r^2$:

$$\frac{k_r}{r} t = m \frac{\Delta h}{2r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta h}{t} = \frac{2k_r r}{m}.$$

Для наших двух случаев:

$$\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \frac{k_2 r_2}{k_1 r_1}.$$

Теперь посмотрим, что происходит при движении с включёнными двигателями. Чтобы поддерживать аппарат на одной высоте, сила тяги двигателей должна быть равна силе сопротивления среды:

$$\begin{cases} F_1 = k_1 v_1 \\ F_2 = k_2 v_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{k_2 v_2}{k_1 v_1},$$

где v_1,v_2 — скорости кораблей на соответствующих высотах; k_1,k_2 — коэффициенты сопротивления среды, зависящие от концентрации частиц на данной высоте.
Чтобы связать силу тяги двигателей корабля и затраты топлива, запишем второй закон Ньютона в импульсной форме[1]:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Изменение импульса корабля равно изменению импульса реактивной струи, то есть $\Delta p = \Delta m u$, где u — скорость струи относительно корабля.

$$F = u \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{\Delta m_2}{\Delta m_1} = \frac{k_2 v_2}{k_1 v_1}.$$

Запишем соотношения, полученные нами в первой и второй части решения:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \dfrac{k_2 r_2}{k_1 r_1} \\ \dfrac{\Delta m_2}{\Delta m_1} = \dfrac{k_2 v_2}{k_1 v_1} \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{\Delta h_2 \Delta m_1}{\Delta h_1 \Delta m2} = \frac{r_2 v_1}{r_1 v_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta h_2 = \frac{\Delta m_2 r_2 v_1}{\Delta m_1 r_1 v_2} \Delta h_1.$$

[1] По второму закону Ньютона для любого тела $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F}$ — векторная сумма всех действующих на тело сил, m — масса тела, $\vec{a}$ — его ускорение. При этом $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$, где $\Delta\vec{v}$ — изменение скорости тела. Подставив второе выражение в первое, получим:

$$\vec{F} = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t},$$

где $\vec{p}$ — импульс тела.

Это равенство называется **вторым законом Ньютона в импульсной форме**.

Так как $v^2 = GM/r$, то $v = \sqrt{GM/r}$:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 \frac{\Delta m_2 r_2 \sqrt{r_2}}{\Delta m_1 r_1 \sqrt{r_1}}.$$

Подставляем числа из условия и получаем: $\Delta h_2 \approx 2$ км/мес.
Ответ: 2 км/мес.
Критерии оценивания:
- Сформулирована идея о том, что изменение полной механической энергии равно работе силы сопротивления среды — 1 балл.
- Вычислена скорость движения по орбите — 1 балл.
- Найдено изменение полной механической энергии аппарата — 2 балла.
- Получено выражение для $\Delta h/t$ — 1 балл.
- Указано, что сила тяги корабля равна силе сопротивления среды — 1 балл.
- Получена связь между силой тяги и затратами топлива — 1 балл.
- Получено выражение для $\Delta m/t$ — 1 балл.
- Ответ — 2 балла.

Примечание. Очевидно, что скорость струи u будет одинаковой в обоих случаях, так как для оптимизации затрат топлива необходимо, чтобы u была максимально возможной для данной конструкции двигателя.

3) Найдём высоту, на которой разорвалась граната. По закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g},$$

так как скорость гранаты в верхней точки равна нулю.
Для каждого из двух осколков найдём модули скоростей u_1 и u_2, приобретённых при взрыве. По закону сохранения энергии:

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 u_1^2}{2} + m_1 g \frac{v^2}{2g} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u_1^2 = v_1^2 - v^2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \sqrt{v_1^2 - v^2}.$$

Аналогично для второго осколка:

$$u_2 = \sqrt{v_2^2 - v^2}$$

Запишем закон сохранения импульса (в момент взрыва)[1]. Перед взрывом скорость гранаты, а значит, и её импульс, были равны 0. Осколки приобрели скорости u_1 и u_2, направленные в противоположные стороны:

$$m_1 u_1 = m_2 u_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{u_1}{u_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\frac{v_1^2 - v^2}{v_2^2 - v^2}}.$$

Ответ:

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\frac{v_1^2 - v^2}{v_2^2 - v^2}}.$$

Критерии оценивания:
- Найдена высота h, на которой разорвалась граната — 2 балла.
- Найдены скорости осколков после взрыва — 3 балла.
- Сформулирован закон сохранения импульса для момента взрыва — 2 балла.
- Ответ — 3 балла.

4) Найдём отношение тепловых мощностей электрических цепей. По закону Джоуля-Ленца:

$$N = \frac{U^2}{r},$$

[1] Закон сохранения импульса в момент взрыва будет соблюдаться, несмотря на наличие внешней силы тяжести, так как время взрыва слишком мало, чтобы суммарный импульс осколков изменился на значимую величину.

где r — общее сопротивление цепи. Обратим внимание, на нагрев идёт не только тепло, выделяющееся на резисторах, но и тепло, которое выделяется в самом источнике тока.

$$\begin{cases} \dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{r_1}{r_2} \\ r_1 = \dfrac{3r}{2} \\ r_2 = 2r \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{3}{4}.$$

Выработанное тепло рассеивается в окружающее пространство. Отдача тепла по условию пропорциональна площади поверхности и четвёртой степени температуры газа:

$$N = \alpha T^4, \tag{1}$$

где α — некий постоянный коэффициент. Площадь поверхности цилиндра равна сумме площадей боковых стенок и торцов:

$$S = 2S_0 + 2\pi rL,$$

но, так как площадь торцов много меньше площади боковых стенок:

$$S = 2\pi rL.$$

Подставляя в формулу (1), получаем:

$$N = \beta T^4 L,$$

где L — длина цилиндра.

Сумма сил, действующих на торцы цилиндра, равна 0. Сжать цилиндр стремится сила упругости пружины, а растянуть — сила давления газа. Таким образом:

$$PS_0 = k(L - L_0).$$

По условию длина недеформированной пружины много меньше длины сосуда, поэтому $L - L_0 \approx L$:

$$PS_0 = kL \quad \Rightarrow \quad P = \frac{kL}{S_0},$$

где k — коэффициент жёсткости пружины. Запишем закон Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT \quad \Leftrightarrow \quad \frac{kL}{S_0} V = \nu RT. \tag{2}$$

Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту $V = S_0 L$. Подставим в (2):

$$kL^2 = \nu RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{kL^2}{\nu R}.$$

Мы получили зависимость температуры от длины цилиндра. Подставим его в формулу (1) — уравнение теплового баланса:

$$N = \beta T^4 L = \beta \frac{k^4}{\nu^4 R^4} L^8 L = \gamma L^9,$$

где γ — некий постоянный коэффициент.

Таким образом:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\gamma {L_2}^9}{\gamma {L_1}^9} = \frac{{L_2}^9}{{L_1}^9} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_2}{L_1} = \sqrt[9]{\frac{3}{4}},$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_0 L_2}{S_0 L_1} = \frac{L_2}{L_1} \approx 1{,}03.$$

Ответ: объём уменьшится в 1,03 раза.

Критерии оценивания:

- Найдено отношение мощностей во втором и в первом случае — 2 балла.
- Записано уравнение теплового баланса — 2 балла.
- Указано, что сила давления равна силе упругости — 2 балла.
- Сформулирован закон Менделеева-Клапейрона — 2 балла.

- Ответ — 2 балла.

Примечание. Многие участники забыли, что внутри цилиндра пружина, а внешнее давление отсутствует, и решили задачу, считая, что давление внутри цилиндра постоянно. Такое решение, при отсутствии иных ошибок, оценивалось в 5 баллов.

5) Пусть расстояние от потолка до средней резинки h, а коэффициент жёсткости резинки — k. Заметим, что система симметрична и находится в равновесии, поэтому изменения длин левой и правой резинки равны, а сумма сил, действующих на грузы, равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}_1} + \vec{F}_{\text{упр}_2} = \vec{0}.$$

Спроецировав это векторное уравнение на горизонтальную и вертикальную оси, получим систему:

$$\begin{cases} mg - F_{\text{упр}_1}\sin\alpha = 0, \\ F_{\text{упр}_1}\cos\alpha = F_{\text{упр}_2}. \end{cases}$$

Для каждой из резинок $F_{\text{упр}} = k(L_{\text{нов}} - L)$, где $L_{\text{нов}}$ — новая длина резинки. Выразим её через h:

$$L_1 = \frac{h}{\sin\alpha}, \qquad L_2 = 2L - 2h\operatorname{ctg}\alpha.$$

Значения сил упругости:

$$F_{\text{упр}1} = k\left(\frac{h}{\sin\alpha} - L\right), \qquad F_{\text{упр}2} = k(L - 2h\operatorname{ctg}\alpha).$$

Подставим эти выражения в начальную систему:

$$m\begin{cases} g - k\left(\dfrac{h}{\sin\alpha} - L\right)\sin\alpha = 0, & (1) \\ k\left(\dfrac{h}{\sin\alpha} - L\right)\cos\alpha = k(L - 2h\operatorname{ctg}\alpha). & (2) \end{cases}$$

В (2) сокращаем k и раскрываем скобки:

$$h\operatorname{ctg}\alpha - L\cos\alpha = L - 2h\operatorname{ctg}\alpha \quad\Rightarrow\quad 3h\operatorname{ctg}\alpha = L(1+\cos\alpha) \quad\Rightarrow\quad h = \frac{1}{3}L(\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha).$$

Подставляем в первое уравнение нашей системы (1), перенеся слагаемое, содержащее k, в правую часть:

$$mg = k(h - L\sin\alpha) = kL\left(\frac{1}{3}(\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha) - \sin\alpha\right) \quad\Rightarrow\quad 3mg = kL(\operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad k = \frac{3mg}{L(\operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha)}.$$

Ответ: коэффициент жёсткости резинки

$$k = \frac{3mg}{L(\operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha)},$$

расстояние от груза до потолка $h = L(\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha)/3$.

Критерии оценивания:

- Сформулировано условие равновесия — 4 балла.
- Правильно выражены силы упругости через h или через иные вспомогательные длины — 2 балла.
- Найдено расстояние от потолка до средней резинки — 2 балла.
- Найден коэффициент упругости — 2 балла.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

1) Пусть q_0 — заряд шарика при напряжении U_0, а $E_0 = U_0/L$ — напряжённость электрического поля (оно одинаково во всём пространстве между обкладками).
При напряжении U_0 сила тяжести уравновешивается силой Кулона:

$$q_0 E = mg \quad \Leftrightarrow \quad q_0 \frac{U_0}{L} = mg \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{mgL}{U_0}.$$

Когда напряжение увеличили в 2 раза, напряжённость поля и заряд также выросли в 2 раза. Следовательно, сила Кулона выросла в 4 раза. Она равна $4mg$, сила тяжести mg, равнодействующая этих сил $3mg$.
Шарик полетит к верхней пластине с ускорением $3g$:

$$\frac{3g{t_1}^2}{2} = L \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{3g}},$$

где t_1 — время полёта шарика вверх.
Столкнувшись с верхней пластиной, шарик приобретёт заряд $(-2q_0)$ и полетит обратно с ускорением $5g$ (теперь сила Кулона и сила тяжести сонаправлены):

$$\frac{5g{t_2}^2}{2} = L \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2L}{5g}},$$

где t_2 — время полёта шарика вниз.
За время t_1+t_2 шарик перенёс заряд $4q_0$. Далее процесс повторяется, шарик колеблется от пластины к пластине. Сила тока равна

$$I = \frac{4q_0}{t_1+t_2} = \frac{4mgL}{U_0\left(\sqrt{\frac{2L}{3g}}+\sqrt{\frac{2L}{5g}}\right)} = \frac{4mg^{1.5}L^{0.5}}{U_0\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}.$$

Ответ:

$$I = \frac{4mg^{1.5}L^{0.5}}{U_0\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}.$$

Критерии оценивания:
- Найден начальный заряд шарика — 2 балла.
- Найден заряд шарика после повышения напряжения — 1 балл.
- Найдены ускорения — 2 балла.
- Найдено время движения — 3 балла.
- Ответ — 2 балла.

2) Пусть a — ребро кубика, k — жёсткость пружины, ρ_1 — плотность верхнего слоя жидкости, ρ_2 — плотность нижнего, $\rho_к$ — плотность кубика, V_1 — объём части кубика, находящегося в верхней жидкости, V_2 — в нижней.
На кубик действуют три силы — сила упругости, сила тяжести и сила Архимеда. Силу Архимеда удобно разделить на две составляющие: $F_{\text{Арх}_1} = V_1\rho_1 g$, $F_{\text{Арх}_2} = V_2\rho_2 g$.
Направим ось Ox вверх. Рассмотрим кубик на расстоянии Δx от положения равновесия:
- Сила тяжести не изменилась.

- Сила упругости изменилась на $\Delta F_{\text{упр}} = -k\Delta x$.
- V_1 изменился на $a^2 x$; $\Delta F_{\text{Арх}_1} = a^2\rho_1 g\Delta x$.
- V_2 изменился на $-a^2 x$; $\Delta F_{\text{Арх}_2} = -a^2\rho_2 g\Delta x$.

Итого общее изменение силы:

$$\Delta F_{\text{упр}} + \Delta F_{\text{Арх}_1} + \Delta F_{\text{Арх}_2} = -k\Delta x + a^2\rho_1 g\Delta x - a^2\rho_2 g\Delta x = -\Delta x(k - a^2\rho_1 g + a^2\rho_2 g).$$

Для обычного пружинного маятника сила зависит от отклонения, как $F = -K\Delta x$. Колебания кубика аналогичны колебаниям такого маятника ($K = k - a^2\rho_1 g + a^2\rho_2 g$).
Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3\rho_{\text{к}}}{k - a^2\rho_1 g + a^2\rho_2 g}} = \frac{\pi}{10} \approx 0{,}3 \text{ сек.}$$

Ответ: $T = 0{,}3$ секунды.
Критерии оценивания:
- Указаны силы, действующие на кубик — 1 балл.
- Написаны изменения сил при выведении кубика из равновесия — 4 балла.
- Выведена зависимость ΔF от Δx — 1 балл.
- Ответ — 4 балла.

3) Пусть L — высота поршня. Сопротивление участка провода в цилиндре $r = c_1 L$, где c_1 — некий коэффициент. Электрическая мощность $N_+ = I^2 r = I^2 L c_1$.
Теплопотери пропорциональны разности температур внутри и снаружи, $N_- = c_2(T - T_{\text{внешн}})$. Объём цилиндра равен произведению высоты и площади основания $V = SL$. Давление постоянно. По закону Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT \quad\Rightarrow\quad T = \frac{PV}{\nu R}.$$

Пусть система находится в равновесии:

$$N_+ = N_- \quad\Rightarrow\quad I^2 L c_1 = c_2(T - T_{\text{внешн}}) \quad\Rightarrow\quad I^2 L c_1 = c_2(\frac{PSL}{\nu R} - T_{\text{внешн}}).$$

Обозначим c_2/c_1, как c_3:

$$I^2 L = c_3(\frac{PSL}{\nu R} - T_{\text{внешн}}) \quad\Rightarrow\quad I^2 L = c_3\frac{PSL}{\nu R} - c_3 T_{\text{внешн}} \quad\Rightarrow\quad I^2 = c_3\frac{PS}{\nu R} - \frac{c_3 T_{\text{внешн}}}{L}.$$

Система выходит из равновесия, когда $I = I_0$. Тогда $N_+ > N_-$ при любом L. Значит,

$${I_0}^2 = \frac{c_3 PS}{\nu R}.$$

При $I = I_0/2$ система в равновесии, $L = h$:

$$\frac{1}{4}{I_0}^2 = \frac{c_3 PS}{\nu R} - \frac{c_3 T_{\text{внешн}}}{h} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}{I_0}^2 = {I_0}^2 - \frac{c_3 T_{\text{внешн}}}{h} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \frac{3}{4}{I_0}^2 = \frac{c_3 T_{\text{внешн}}}{h} \quad\Rightarrow\quad c_3 T_{\text{внешн}} = \frac{3}{4}{I_0}^2 h.$$

Осталось найти L при $I = I_0/4$:

$$\frac{1}{16}{I_0}^2 = \frac{c_3 PS}{\nu R} - \frac{c_3 T_{\text{внешн}}}{h_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{16}{I_0}^2 = {I_0}^2 - \frac{\frac{3}{4}{I_0}^2 h}{h_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{16} = 1 - \frac{\frac{3}{4}h}{h_1} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \frac{3h}{4h_1} = \frac{15}{16} \quad\Rightarrow\quad \frac{h}{h_1} = \frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad h_1 = 0{,}8h.$$

Ответ: $0{,}8h$.
Критерии оценивания:
- Написаны выражения для N_+ и N_- — 2 балла.

- Рассмотрен случай $I = I_0$ — 2 балла.
- Рассмотрен случай $I = I_0/2$ — 2 балла.
- Рассмотрен случай $I = I_0/4$ — 2 балла.
- Ответ — 2 балла.

4) Пусть масса каната равна M.
Рассмотрим положение, в котором левый конец каната прошёл половину пути до блока. По закону сохранения энергии:

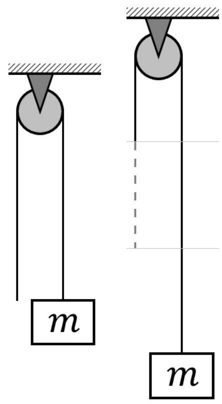
$$\Delta E_{\text{к}} + \Delta E_{\text{п}} = 0.$$

В начале и груз, и канат покоились, а теперь двигаются со скоростью v, поэтому:

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{(M+m)v^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии груза:

$$\Delta E_{\text{п}_1} = -mg\frac{L}{4},$$



каната:

$$\Delta E_{\text{п}_2} = -\frac{M}{4}\cdot\frac{L}{4}\cdot g$$

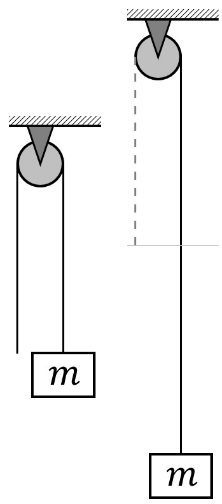
(см. рис. справа), поэтому:

$$\frac{(M+m)v^2}{2} - mg\frac{L}{4} - \frac{M}{4}\cdot\frac{L}{4}\cdot g = 0 \quad\Rightarrow\quad M\left(\frac{v^2}{2} - \frac{gL}{16}\right) = m\left(\frac{gL}{4} - \frac{v^2}{2}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad M\frac{8v^2 - gL}{16} = m\frac{gL - 2v^2}{4} \quad\Rightarrow\quad M = \frac{4gL - 8v^2}{8v^2 - gL}m. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим положение, в котором левый конец каната достиг блока. Изменение потенциальной энергии груза:

$$\Delta E'_{\text{п}_1} = -mg\frac{L}{2},$$



а каната:

$$\Delta E'_{\text{п}_2} = -\frac{M}{2}\frac{L}{2}g$$

(см. рис. справа). Тогда закон сохранения энергии:

$$\frac{(M+m){v_{\text{к}}}^2}{2} - mg\frac{L}{2} - \frac{M}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot g = 0 \quad\Rightarrow\quad {v_{\text{к}}}^2 = \frac{2\left(mg\frac{L}{2} + \frac{M}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot g\right)}{M+m} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad v_{\text{к}} = \sqrt{\frac{gL}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2m+M}{m+M}}. \quad (2)$$

Подставляем (1) в (2):

$$v_{\text{к}} = \sqrt{\frac{gL}{2}}\cdot\sqrt{\frac{8v^2+2gL}{3gL}} \quad\Rightarrow\quad v_{\text{к}} = \sqrt{\frac{4v^2+gL}{3}}.$$

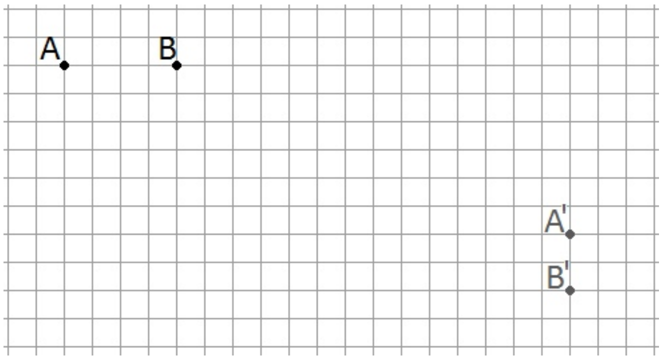
Ответ:

$$v_{\text{к}} = \sqrt{\frac{4v^2+gL}{3}}.$$

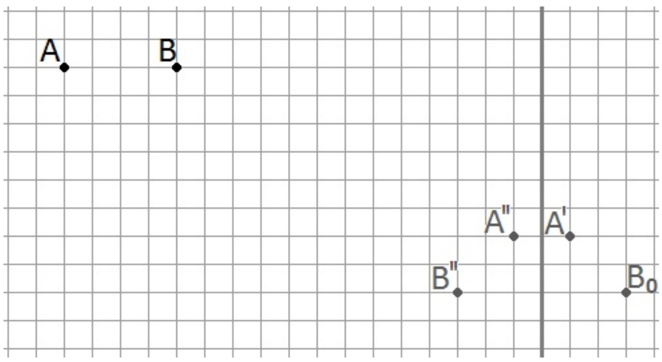
Критерии оценивания:

- Написано изменение энергии на первом этапе — 3 балла.
- Написано изменение энергии на втором этапе — 3 балла.
- Ответ — 4 балла.

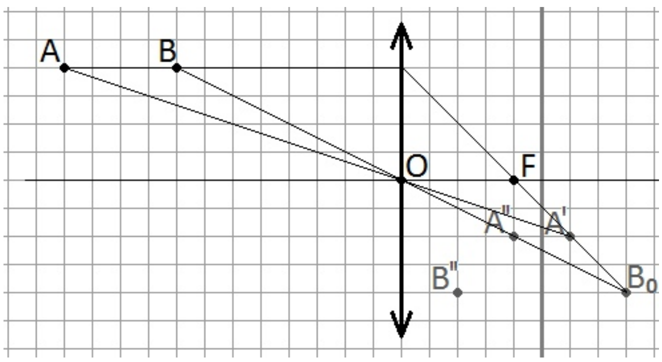
5) Назовём левый объект A, правый объект — B.
Зеркало не меняет размеры изображений (расстояния от точки до главной оптической оси). Размеры объектов А и B одинаковы, но объект B ближе к линзе, поэтому размер его изображения больше. Значит, верхнее изображение (A') соответствует объекту A, а нижнее (B') — объекту B.



На первой оптической схеме расстояния от линзы до объектов равны. Если бы оба изображения были бы неотражёнными, изображение объекта B было бы правее, чем изображения объекта A. Если бы оба изображения были отражёнными, изображение объекта B было бы левее. Значит, изображение B' на первой оптической схеме является отражённым, а изображение A' — нет.
На второй оптической схеме изображение объекта A сместилось влево. Значит, оно отражённое. Сравнивая положение отражённого изображения A'' и неотражённого A', находим положение зеркала (посередине между A' и A'').



Зная, где находится зеркало, найдём положение неотражённого изображения B (расстояние от B_0 до зеркала равно расстоянию от зеркала до B'').
Проведём отрезки AA' и BB_0, соединяющие объекты и их неотражённые изображения. Точка их пересечения — оптический центр системы. Через эту точку проходит линза.



Найдём фокус линзы. Луч, падающий на линзу перпендикулярно её поверхности, после преломления проходит через фокус. Проведём такой луч и найдём точку его пересечения с главной оптической осью. Фокус находится в 4 клеточках от линзы. Так как, согласно масштабу, в 1 клеточке 10 см, $f = 40$ см.

Ответ: 40 см.

Критерии оценивания:

- Установлено соответствие между объектами и изображениями — 2 балла.
- Определено, что на первой схеме B' отражённое, а A' — неотражённое — 2 балла.
- Найдено положение зеркала — 2 балла.
- Определено положение линзы — 2 балла.
- Ответ — 2 балла.