Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Заключительный этап

Решения задач

Задачи для 5 класса

1. Расставьте в фигурках цифры от 1 до 9 так, чтобы каждая цифра встречалась в одном квадрате, одном круге и одном треугольнике, а равенство оказалось верным:

   $\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square = 2019.$

   Решение. К сожалению, получить 2019 невозможно. Приносим извинения за ошибку в задаче. В качестве компенсации за эту задачу ставилось до 2 баллов тем, кто привёл пример получения чисел 2018 и 2020.

   Замечание. Максимальное значение, которое можно получить, равно $9\cdot9\cdot9+8\cdot8\cdot8 = \ldots+1\cdot1\cdot1 = 9^3+8^3+\ldots+1^3 = 2025$. При перестановке цифр результат уменьшается. Например, так можно получить 2018 и 2020:
   $9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3\cdot3\cdot2 + 2\cdot2\cdot3 + 1\cdot1\cdot1 = 2020;$
   $9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 2^3 + 4\cdot4\cdot3 + 3\cdot3\cdot4 + 1\cdot1\cdot1 = 2018.$

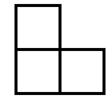
2. Встретились 7 детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Могло ли оказаться, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил)?

   Решение. Все подарили разное число подарков, при этом никто не дарил сам себе, поэтому были подарены все количества от 0 до 6. Всего был отдан 21 подарок. Каждый ребёнок получил по 3 подарка.
   Пример того, кому кто вручил подарки:
   1-му: 5-й, 6-й, 7-й;
   2-му: 5-й, 6-й, 7-й;
   3-му: 4-й, 6-й, 7-й;
   4-му: 5-й, 6-й, 7-й;
   5-му: 4-й, 6-й, 7-й;
   6-му: 3-й, 5-й, 7-й;
   7-му: 2-й, 3-й, 4-й.

3. Двум воронам как-то бог послал немного сыру. Первой вороне досталось 100 г, из которых часть отняла лисица. Кусочек у второй вороны оказался вдвое больше, чем у первой, но и съесть она успела вдвое меньше, чем первая ворона. Доставшаяся же лисице часть сыра от второй вороны оказалась втрое больше, чем от первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

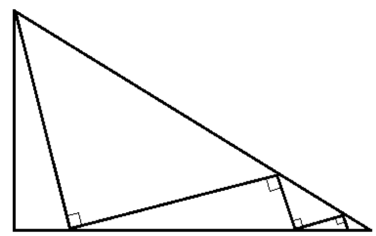
   Решение. Пусть первая ворона съела x грамм сыра. Тогда лисе от первой вороны досталось $100-x$ грамм сыра. Вторая ворона съела $\frac{x}{2}$ грамм сыра. От второй вороны лиса получила $200-\frac{x}{2}$ грамм сыра. Это было втрое больше, значит: $200-\frac{x}{2} = 3(100-x)$. Решение: $x = 40$. Лиса съела 240 грамм.

4. У Вити есть белая доска из 16 клеток в форме квадрата 4×4, из которой он хочет вырезать 4 белых трёхклеточных уголка. Петя же хочет ему помешать, окрашивая некоторые клетки в красный цвет. Какое наименьшее количество клеток ему придётся закрасить? (Уголок — фигура, показанная на рисунке, возможно, повёрнутая.)



Решение. Если вырезать из доски одну клетку (любую), то оставшуюся часть можно разбить на пять уголков. Если вырезать ещё одну, то четыре из этих пяти уголков сохранятся. Поэтому одной или двух вырезанных клеток недостаточно, чтобы помешать Вите. Постановки трех клеток (например, подряд по одной из главных диагоналей) - достаточно.

5. Муха сидит в одном из острых углов комнаты, имеющей форму прямоугольного треугольника, самая длинная из сторон которого равна 5 м. В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает под прямым углом и продолжает лететь по прямой (см. рисунок). Коснувшись стены в десятый раз, она останавливается. Может ли муха пролететь больше 10 метров?



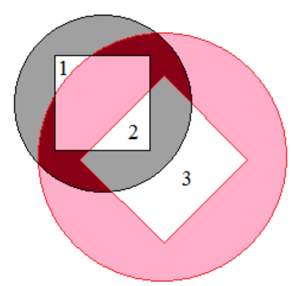
Решение. Гипотенуза (сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла) больше любого из катетов (двух другших его сторон), значит, удвоенная длина гипотенузы будет больше суммы длин двух других катетов. Траекторию полёта мухи можно разложить на 5 прямоугольных треугольников, где гипотенуза является частью исходной гипотенузы. То есть, даже пролетев из одного острого угла в другой, длина пути мухи будет меньше 10 метров.

Задачи для 6 класса

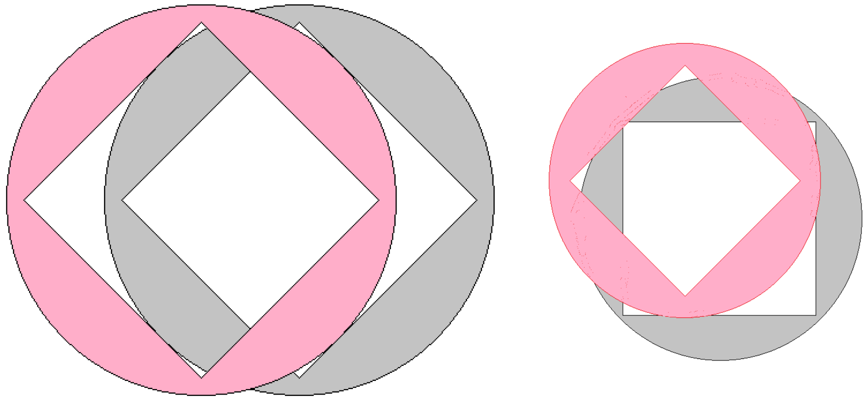
1. См. задачу 5.3.

2. См. задачу 5.4.

3. Будем называть *странным кольцом* круг с квадратной дыркой в середине (центры квадрата и круга совпадают; оставшаяся часть круга при этом не должна распадаться на части). Если положить на стол два странных кольца, то может получиться фигура с несколькими дырками (например, на рисунке их 3). А можно ли вырезать из бумаги два странных кольца и положить их на стол так, чтобы получилось больше 5 дырок?



Решение. Можно, например, как на этих рисунках.



4. См. задачу 5.5.

5. Существует ли такое натуральное число x, что среди утверждений «$x + 1$ кратно 19», «$x + 2$ кратно 18», «$x + 3$ кратно 17», …«$x + 17$ кратно 3», «$x + 18$ кратно 2» ровно половина верных?

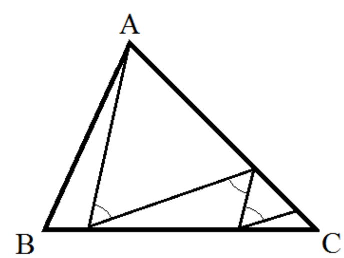
   Решение. Заметим, что условия можно заменить следующими: «$x + 20$ кратно 19», «$x + 20$ кратно 18», «$x + 20$ кратно 17», …«$x + 20$ кратно 3», «$x + 20$ кратно 2». Таким образом, $x + 20$ должно делиться на половину из чисел $2, 3, \ldots, 19$. Подходит, например, $x + 20 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 19$.

Задачи для 7 класса

1. См. задачу 5.3.

2. См. задачу 6.3.

3. Муха сидит в вершине A треугольной комнаты ABC ($\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$, $AC = 5$ м). В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает на $60°$ и продолжает лететь по прямой (см. рисунок). Может ли оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 9,9 метров?



   Решение. Пусть муха вылетела под углом 60 градусов к прямой AC. Рассмотрим равносторонний треугольник AKC со стороной AC. Заметим, что его стороны AK и KC можно разбить на части (на бесконечно много частей) так, чтобы каждая часть равнялась очередному отрезку траектории мухи. Сумма этих частей равна $AK + KC = 10$ м, поэтому в какой-то момент муха пролетит больше 10 метров.

4. Три ученика написали на доске по двузначному числу, каждое из которых является точным квадратом. Оказалось, что если «склеить» их в одно шестизначное число, то оно тоже является квадратом натурального числа. Найдите все такие шестизначные числа.

Решение. Пусть двузначные квадраты равны x^2, y^2 и z^2, тогда $x, y, z \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Шестизначное число обозначим t^2 ($t > 0$). Тогда

$$t^2 = 10000x^2 + 100y^2 + z^2 = (100x)^2 + (10y)^2 + z^2.$$

Пусть $t = 100x + k$. Очевидно, $k \in \mathbb{N}$, так как $t^2 > (100x)^2$. Тогда

$$\begin{aligned}(100x)^2 + (10y)^2 + z^2 &= (100x + k)^2,\\ 100y^2 + z^2 &= 200kx + k^2.\end{aligned}$$

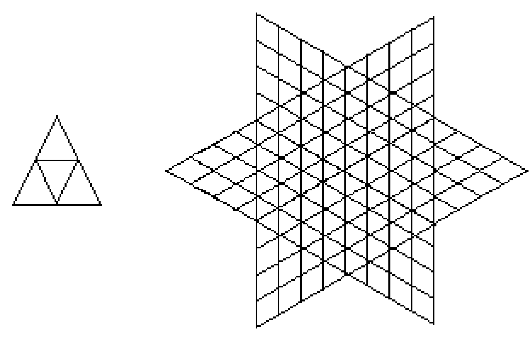
Разберём случаи. Если $k \geqslant 11$, то правая часть $\geqslant 200 \cdot 11 \cdot 4 + 11^2 = 8921$, но левая часть $\leqslant 8181$. Если $k = 10$, то правая часть делится на 100, а левая не делится. Наконец, пусть $k < 10$. Тогда k^2 — это остаток от деления левой части на 100, поэтому $k = z$. Таким образом, $100y^2 = 200zx$, то есть $y^2 = 2zx$. Но при $4 \leqslant z, x \leqslant 9$ число $2zx$ может быть квадратом только при $\{x, z\} = \{8, 9\}$ или $\{x, z\} = \{8, 4\}$. В первом случае $2zx > 100$, так что он не подходит, а во втором случае получается $y = 8$. Ответ: $166464 = 408^2$ и $646416 = 804^2$.

5. Существует ли такое натуральное число x, что среди утверждений «$x+1$ кратно 2019», «$x+2$ кратно 2018», «$x+3$ кратно 2017», … «$x+2017$ кратно 3», «$x+2018$ кратно 2» ровно половина верных?

   Решение. Заметим, что условия можно заменить следующими: «$x+2020$ кратно 2019», «$x+2020$ кратно 2018», «$x+2020$ кратно 2017», … «$x+2020$ кратно 3», «$x+2020$ кратно 2». Таким образом, $x + 2020$ должно делиться на половину из чисел $2, 3, \ldots, 2019$. Подходит, например, $x + 2020 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2019$.

Задачи для 8 класса

1. На левом рисунке изображены пять треугольников (четыре маленьких и один большой). А сколько треугольников на правом рисунке?



   Решение. Заметим, что каждые три непараллельные прямые либо пересекаются в одной точке, либо задают треугольник. Количество троек прямых равно 9^3, а количество точек $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 61$. Поэтому треугольников $729 - 61 = 668$.

2. См. задачу 7.4.

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60^\circ$, а остальные углы равны между собой. Известно, что $AB = 6, CD = 4, EA = 7$. Найдите расстояние от точки A до прямой CD.

   Решение. Ясно, что все остальные углы равны 120 градусов, поэтому $AB \parallel DE$ и $BC \parallel AE$. Также $DE = 2$ и $BC = 3$. Искомое расстояние — это высота правильного треугольника со стороной 9 (до которого можно достроить исходный пятиугольник), то есть $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

4. См. задачу 7.5.

5. Двое играют в такую игру. Первый загадывает 8 действительных чисел (не обязательно различных) и пишет на листочке все их попарные суммы в произвольном порядке (некоторые из них могут совпадать). Второй по полученным 28 суммам должен определить исходные числа. Всегда ли он может гарантированно это сделать?

   Решение. Нет. Например, нельзя различить следующие два набора чисел:
   1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20 и 2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19.
   Или такие: -1, -1, -1, 1, 0, 2, 2, 2 и -2, 0, 0, 0, 3, 1, 1, 1.

Задачи для 9 класса

1. См. задачу 8.1.

2. См. задачу 8.3.

3. Вычислите площадь множества точек на координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1 - x} \leqslant 0$.

   Решение. Левая часть имеет смысл только при $0 \leqslant x \leqslant 1$. При этом требуется, чтобы $y + \sqrt{x}$ и $y - x^2$ имели разные знаки (или одно из них равнялось нулю), или чтобы x равнялся 1. Если исключить вариант $x = 1$ (дающий нулевую площадь), то остаётся часть плоскости, ограниченная отрезком прямой $x = 1$ и частями парабол $y = -\sqrt{x}$ и $y = x^2$. Разрезав эту фигуру на две части по оси абсцисс и переложив верхнюю часть под нижнюю, получим квадрат площади 1.

   Ответ: площадь равна 1.

4. Встретились N детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Получилось, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил). При каких $N > 1$ это возможно?

   Решение. Все подарили разное число конфет, при этом никто не дарил сам себе, поэтому были подарены все количества от 0 до $N - 1$. Значит, всего подарено $\frac{N(N-1)}{2}$, и это число должно делиться на N. А это возможно только при нечётном N (при четном будет остаток $\frac{N}{2}$).

   Пример для нечётного N будем строить по индукции. Если $N = 1$, то никто ничего не дарит. Иначе пусть последний ребёнок подарил по конфете всем остальным, а все дети со второго по $(N - 1)$-й подарили по конфете первому и последнему (так как

N нечётное, можно это сделать так, чтобы в итоге первый и последний получили нужное число конфет). Теперь для детей с второго по $(N-1)$-го можно применить предположение индукции.

5. Натуральное число n назовём *кубоватым*, если $n^3 + 13n - 273$ является кубом натурального числа. Найдите сумму всех кубоватых чисел.

   Решение. Если $0 < 13n - 273 < 3n^2 + 3n + 1$, то n не может быть кубоватым. Эти неравенства равносильны $n > 21$, так что осталось перебрать все остальные числа.

   Если $n = 21$, то $13n - 273 = 0$, так что 21 кубоватое. При $n < 21$ обязательно $13n - 273 < 0$, так что пока $13n - 273 > -3n^2 + 3n - 1$, число n не будет кубоватым (т.е. при $8 < n < 21$).

   Если $n = 8$, то $13n - 273 = -169 = -3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 - 1$, так что оно кубоватое. При $n \leqslant 5$ выражение $n^3 + 13n - 273$ будет отрицательным, так что они точно не кубоватые. Числа 6 и 7 не кубоватые, это можно проверить непосредственно. Итого ответ $8 + 21 = 29$.

Задачи для 10 класса

1. Мотоциклист выехал из пункта A с начальной скоростью 90 км/ч, равномерно ее увеличивая (то есть за одинаковые промежутки времени его скорость увеличивается на одинаковую величину). Через три часа мотоциклист прибыл в пункт B, по дороге проехав через C. После этого он развернулся и, по-прежнему равномерно увеличивая скорость, поехал обратно. Еще через два часа он проехал мимо пункта C со скоростью 110 км/ч и продолжил движение в A. Найдите расстояние между пунктами A и C.

   Решение. За 5 часов скорость изменилась с 90 км/ч до 110 км/ч, поэтому ускорение равно 4 км/ч^2. От A до B расстояние равно

$$90 \cdot 3 + \frac{4}{2} \cdot 3^2 = 270 + 18 = 288\,(\text{км}),$$

   от B до C —

$$110 \cdot 2 - \frac{4}{2} \cdot 2^2 = 220 - 8 = 212\,(\text{км}).$$

   А нужное расстояние составляет 76 км.

2. См. задачу 8.3.

3. Докажите, что для всех положительных чисел a и b выполняется неравенство $\left(a^{2018} + b^{2018}\right)^{2019} > \left(a^{2019} + b^{2019}\right)^{2018}$.

   Решение. Не умаляя общности, $a \geqslant b$. Обозначим 2018 через n. Тогда неравенство можно переписать в виде

$$a^{n(n+1)} + \binom{n+1}{1} a^{n^2} b^n + \ldots + \binom{n+1}{k} a^{n(n+1-k)} b^{nk} + \ldots + b^{n(n+1)} >$$
$$> a^{(n+1)n} + \binom{n}{1} a^{(n+1)(n-1)} b^{n+1} + \ldots + \binom{n}{k} a^{(n+1)(n-k)} b^{(n+1)k} + \ldots + b^{(n+1)n},$$

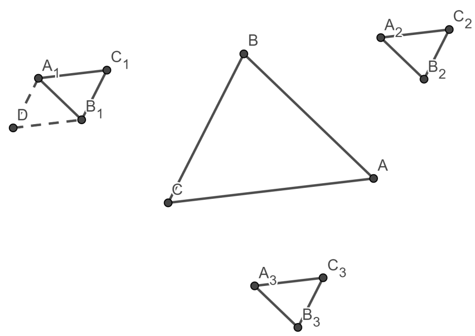
   где $\binom{m}{k} = C_m^k$ биномиальные коэффициенты.

Так как $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ при $0 < k < n+1$, то левая часть заведомо строго больше $a^{n(n+1)} + \binom{n}{1} a^{n^2} b^n + \ldots + \binom{n}{k} a^{n(n+1-k)} b^{nk} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^{n^2} + b^{n(n+1)}$. Так как $a \geqslant b$, то есть неравенства $\binom{n}{k} a^{n(n+1-k)} b^{nk} \geqslant \binom{n}{k} a^{(n+1)(n-k)} b^{(n+1)k}$. Если теперь их сложить и добавить неравенство $b^{n(n+1)} > 0$, получится требуемое неравенство.

4. На плоскости отмечены пять точек, любые три из которых образуют треугольник площади не меньше 2. Докажите, что найдутся 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3.

   Решение. Обозначим точки через A, B, C, X, Y, и пусть ABC имеет наибольшую площадь S среди всех треугольников с вершинами в этих точках. Нужно доказать, что все площади остальных треугольников не могут быть больше $\frac{2}{3}S$. Пусть это не так, тогда все площади заключены между S и $\frac{2}{3}S$. Для ABX, BCX и CAX это условие значит, что X находится в одном из трёх маленьких треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ снаружи ABC, и аналогично для Y.

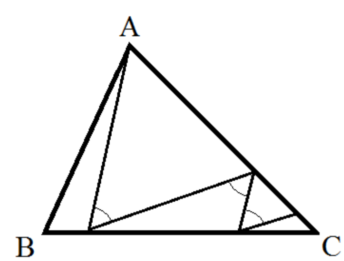
   Если X и Y попали в один такой маленький треугольник (не умаляя общности, в $A_3B_3C_3$), то AXY и BXY будут иметь площадь не больше $\frac{1}{3}S$, потому что эти треугольники содержатся в треугольниках AA_3C_3 и BB_3C_3, имеющие площадь ровно $\frac{1}{3}S$. Если же они попали в разные треугольники (не умаляя общности, в $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$), то XCY имеет площадь строго меньше $\frac{2}{3}S$. Действительно, если отразить X или Y относительно C, то площадь треугольника XCY не изменится, и он окажется в четырёхугольнике CC_1A_1D. Площадь четырёхугольника равна $\frac{2}{3}S$, и она явно не может вся покрываться треугольником.



5. См. задачу 9.5.

Задачи для 11 класса

1. Муха сидит в вершине A треугольной комнаты ABC ($\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 5$ м). В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном прямом направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает на $60°$ и продолжает лететь по прямой (см. рисунок). Может ли оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 12 метров?



   Решение. Построим на AC как на основании треугольник AXC с противолежащим углом $60°$ так, чтобы муха изначально летела вдоль луча AX. Несложно показать, что общий путь, пройденный мухой, равен $AX + XC$. Тогда X пробегает некоторую дугу окружности, и пройденный путь достигает максимума, если $\angle XAC = 60°$. На самом деле даже не обязательно доказывать, что это максимум: $AC = \frac{\sqrt{6}}{2}AB = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ и $AX + XC = 2AC = 5\sqrt{6} > 12$.

2. Предприятие в течение года производит некий товар в количестве x_1 за январь, x_2 за февраль, ..., x_{12} за декабрь. Среднее производство товара с начала года вычисляется так:

$$\overline{x}_1 = x_1, \quad \overline{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \overline{x}_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \ldots, \quad \overline{x}_{12} = \frac{1}{12}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}).$$

Известно, что $\overline{x}_k < x_k$ при k от 2 до 6 и $\overline{x}_k > x_k$ при k от 7 до 12. В каком месяце среднее производство товара с начала года было наибольшим?

Решение. Заметим, что

$$\overline{x}_{k+1} = \frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}) = \frac{1}{k+1}(k\overline{x}_k + x_{k+1}),$$
$$x_{k+1} - \overline{x}_{k+1} = k(\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k).$$

Итого мы выяснили, что среднее производство увеличивается (уменьшается), когда производство в месяц больше (меньше), чем соответствующее среднее. Значит, максимум был в шестом месяце.

3. См. задачу 9.4.

4. См. задачу 10.4.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106, \\ yz + 3y = z + 39, \\ zx + 3x = 2z + 438. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что $y \neq 1$ (так как при подстановке в первое уравнение тогда получилось бы $x - 2 = x + 106$). Тогда из первых двух уравнений можно выразить x и z:

$$x = \frac{106 + 2y}{y - 1},$$
$$z = \frac{39 - 3y}{y - 1}.$$

Подставим в последнее уравнение, домножим на $(y-1)^2$ и раскроем скобки:

$$-432y^2 + 864y + 3456 = 0,$$
$$-432(y - 4)(y - 2) = 0.$$

Таким образом, есть решения $(38, 4, 9)$ и $(-34, -2, -15)$.