Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

1) (1 балл) Так как линейка все время продолжает оставаться в равновесии, то моменты сил, с которыми на нее действуют жук и муравей, должны оставаться равны, то есть $m_1gl_1 = m_2gl_2$. Из этого следует:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_1}{l_2},$$

то есть в 5 раз более тяжелый жук всегда находится в 5 раз ближе к центру линейки, чем муравей. Но это означает, что отношения скоростей у них такие же, то есть:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Муравей прополз от центра линейки до ее края за 1 минуту, то есть его скорость $v_1 = 15$ см/мин. Но это означает, что скорость жука в 5 раз меньше, то есть $v_2 = 3$ см/мин.

Ответ: 3 см/мин.

2) (1 балл) Максимальное количество леденцов Незнайка сможет перевозить в том случае, если плот полностью погружен в воду (в этом случае максимальна выталкивающая сила Архимеда). Запишем для этого случая условия равновесия для первого плота.

На него действует три силы — сила Архимеда со стороны воды вверх, сила тяжести самого плота и сила тяжести леденцов:

$$V\rho_0 g = V\rho_1 g + 4mg,$$

где ρ_0 — плотность воды, ρ_1 — плотность пенопласта, а m — масса леденца.

Теперь напишем такое же уравнение для второго плота. Заметим при этом, что так как по всем параметрам он был увеличен в 3 раза, то его общий объем вырос в $3^3 = 27$ раз. То есть:

$$27V\rho_0 g = 27V\rho_2 g + kmg,$$

где k — искомое нами количество леденцов. В обоих полученных уравнениях перенесем первое слагаемое правой части в левую часть, после чего поделим второе уравнение на первое, получим:

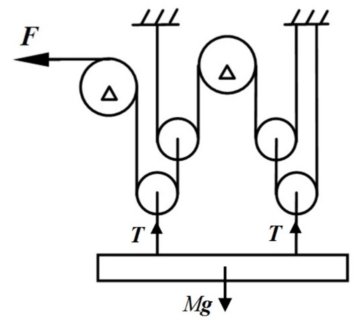
$$27 \cdot \frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0 - \rho_1} = \frac{k}{4}.$$

Теперь подставляем значения $\rho_0 = 1$ г/см^3, $\rho_1 = 0{,}1$ г/см^3, $\rho_2 = 0{,}8$ г/см^3 и получаем:

$$27 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}9} = \frac{k}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 24.$$

Ответ: он сможет перевозить 24 леденца.

3) **(1 балл)** На балку действует три силы — сила тяжести $F_т$ (направлена вниз), сила натяжения левой нити T_1 (направлена вверх) и сила натяжения правой нити T_2 (направлена вверх). Для того, чтобы тянуть балку, достаточно, чтобы $Mg = T_1 + T_2$. Так как система симметрична относительно центрального неподвижного блока, то $T_1 = T_2$, то есть



$$T_1 = \frac{Mg}{2}.$$

Теперь рассмотрим силы, действующие на самый левый из подвижных блоков. Так как блок невесомый, то сумма этих сил должна быть равна нулю. На него действуют сила T_1 вниз и две силы F (равны между собой, так нить невесома) вверх. То есть

$$F = \frac{T_1}{2} = \frac{Mg}{4} = 50 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 50$ Н.

4) **(2 балла)** Рассмотрим, моменты каких сил действуют на колесо мельницы. Этих моментов два:

1) Момент силы тяжести ведра $L_1 = Mgr$, где M — масса ведра с водой, r — радиус центральной части колеса мельницы.
2) Момент силы давления ветра L_2.

То, что ведро может быть поднято одной только силой ветра, означает, что $L_2 > L_1$, и наибольшее значение массы, которую может поднять мельница, достигается при $L_2 = L_1$ и вычисляется по формуле

$$M = \frac{L_2}{gR}.$$

Заметим, что так как у двух мельниц различается только размах лопастей, то и g, и R остаются прежними. Рассмотрим, как изменился момент силы давления ветра при изменении размаха лопастей в 1,5 раза:

$$L_2 = F \cdot l = P \cdot S \cdot l,$$

где P — давление ветра, S — площадь лопасти, l — плечо силы давления. Давление ветра осталось прежним (так как прежней осталась его скорость). Так как размах лопастей увеличился в 1,5 раза, то и плечо силы давления ветра увеличилось в 1,5 раза. Площадь лопасти увеличилась также в 1,5 раза (так как длина больше в 1,5 раза, а ширина осталась прежней).

Таким образом, момент силы давления ветра увеличился в $1{,}5^2 = 2{,}25$ раз, а значит, эта мельница может поднять в 2,25 раз более тяжелое ведро, то есть ведро с $8 \cdot 2{,}25 = 18$ литрами воды.

Ответ: 18 литров.

Примечание. В ходе решения мог быть не учтен один из эффектов — либо то, что момент силы давления увеличился в 1,5 раза, либо то, что сама сила увеличилась из-за увеличения площади лопастей. В обоих случаях получается ответ 12 литров. За такой ответ мы ставили **1 балл**.

5) **(2 балла)** Введем коэффициент пропорциональности k между разностью температур ванны и окружающей среды и мощностью теплопотерь, то есть, согласно примечанию к условию, $P = K(T - T_0)$.

Теперь найдем эту величину k, исходя из первых измерений Леопольда. В это время в воде не было никакого обогревателя, то есть вода охлаждалась исключительно из-за теплопотерь, при чем их мощность можно найти по формуле:

$$P_1 = \frac{\Delta Q}{t} = \frac{cm\Delta T}{t}.$$

Подставляем в эту формулу удельную теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C), ее массу $m = 10$ кг, изменение температуры $\Delta T = 1$°C и время $t = 5$ с и получаем мощность теплопотерь $P_1 = 8400$ Вт. Отсюда находим коэффициент k:

$$k = \frac{P_1}{T_1 - T_0} = \frac{8400 \text{ Вт}}{50°\text{C} - 20°\text{C}} = 280 \ \frac{\text{Вт}}{°\text{C}}.$$

Теперь рассмотрим, что будет происходить, если Леопольд подключит нагреватель. По истечению долгого времени установится равновесие между количеством теплоты, которое поступает в воду от нагревателя, и тем, которое уходит от нее в окружающую среду. То есть

$$P_2 = k(T_2 - T_0).$$

Отсюда, зная коэффициент k, мощность нагревателя P_2 и температуру T_0, найдем установившуюся температуру:

$$T_2 = T_0 + \frac{P_2}{k} = 25°\text{C}.$$

Ответ: $T_2 = 25$°C.

6) **(1 балл)** На океанском дне на все предметы действуют сила тяжести и сила Архимеда. То, что гусли и золотой песок, подаренный Садко, весили на дне одинаково, означает то, что разность этих сил для них была одинакова, то есть:

$$V_\text{г} g(\rho_\text{г} - \rho_0) = V_\text{п} g(\rho_\text{п} - \rho_0),$$

где ρ_0 — плотность воды, $V_\text{п}, V_\text{г}$ — объемы, занимаемые песком и гуслями соответственно; $\rho_\text{п}, \rho_\text{г}$ — их плотности.

Выразим объемы песка и гуслей через их массы и плотности:

$$m_{\text{п}}g \cdot \frac{\rho_{\text{п}} - \rho_0}{\rho_{\text{п}}} = m_{\text{г}}g \cdot \frac{\rho_{\text{г}} - \rho_0}{\rho_{\text{г}}}.$$

Теперь вспомним о том, что контрольное взвешивание на суше выявило, что песок легче гуслей на $\Delta m = 2{,}9$ кг. Подставим $m_{\text{п}} = m_{\text{г}} - \Delta m$ и перенесем все слагаемые, содержащие $m_{\text{г}}$, в одну сторону:

$$\frac{\rho_{\text{п}} - \rho_0}{\rho_{\text{п}}}\Delta m = \left(\frac{\rho_{\text{п}} - \rho_0}{\rho_{\text{п}}} - \frac{\rho_{\text{г}} - \rho_0}{\rho_{\text{г}}}\right) m_{\text{г}}.$$

Приводя к общему знаменателю и сокращая, получаем:

$$(\rho_{\text{п}} - \rho_0)\Delta m = \frac{\rho_0(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{г}})}{\rho_{\text{г}}} m_{\text{г}} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{г}} = \frac{\rho_{\text{г}}(\rho_{\text{п}} - \rho_0)}{\rho_0(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{г}})}\Delta m.$$

Осталось подставить значения плотностей и Δm из условия.

Ответ: $m_{\text{г}} = 4{,}8$ кг.

7) **(2 балла)** Колесо не проскальзывает, а это означает, что скорость каждой точки колеса относительно центра равна скорости центра колеса относительно твердой поверхности, то есть, их пути за равные промежутки времени будут равны.

Найдем путь, который проделал центр колеса. Он двигался по окружности радиуса $4R$ (так как радиус всей петли $5R$, а он ближе к центру петли еще на R), то есть, проделав полный оборот, он прошел расстояние $L = 8\pi R$. Но значит, столько же прошла и точка на ободе относительно центра. Полный оборот точки на ободе — это $2\pi R$. Значит, точка на ободе совершила

$$\frac{8\pi R}{2\pi R} = 4 \text{ оборота}.$$

Ответ: 4 оборота.

8) **(2 балла)** В первом случае, когда лед и вмороженная золотая монета висят в воздухе, на них действует, с одной стороны, суммарная сила тяжести, а с другой стороны — сила упругости сжатой пружинки:

$$(m_{\text{з}} + m_{\text{л}})g = kx_1. \tag{8.8.1}$$

Во втором случае к ним прибавилась сила Архимеда, действующая на лед:

$$(m_{\text{з}} + m_{\text{з}})g - F_{Apx} = kx_2 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{з}}g + Vg(\rho_{\text{л}} - \rho_0) = kx_2.$$

Заметим, что так как плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0{,}9$ г/см^3, а плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, то результирующая сила, действующая на лед во втором случае, окажется по модулю в 9 раз меньшей, чем в первом, и направлена в противоположную сторону, то есть:

$$\left(m_{\text{з}} - \frac{m_{\text{л}}}{9}\right) g = kx_2. \tag{8.8.2}$$

Домножим уравнение (8.8.2) на 9 и сложим его с уравнением (8.8.1):

$$10m_з g = k(9x_2 + x_1) \quad \Rightarrow \quad m_з g = k\frac{9x_2 + x_1}{10}.$$

Заметим, что это уравнение полностью описывает тот случай, когда на пружине висит только монета. Подставим туда данные из условия, не забыв, что сжатой пружине присваиваем знак «+», а растянутой — « − »:

$$x_3 = \frac{9x_2 + x_1}{10} = 2 \text{ см}.$$

Ответ: $x_3 = +2$ см.

9) **(1 балл)** Пусть коэффициент упругости первой пружины k_1, второй — k_2, а сила тяжести, действующая на предмет — F. Тогда:

$$\begin{cases} k_1 x_1 = F, \\ k_1 x_2 + k_2 x_2 = F. \end{cases}$$

Так как тело остается прежним, то $k_1 x_1 = (k_1 + k_2)x_2$, откуда:

$$\frac{k_2 + k_1}{k_1} = \frac{x_1}{x_2} = 3 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 2k_1.$$

Значит, если оставить только вторую пружину, то она растянется в два раза меньше, чем первая, то есть на 1,5 см.

Ответ: 1,5 см.

10) **(1 балл)** Так как сосуды сообщающиеся, то давления в точке их соединения должны быть равны. Так как в нижней части обоих сосудов находится вода, то давления будут равны и на уровне нижнего края масла в левом сосуде.

Пусть высота столба $h_м$. Тогда:

$$\rho_м g h_м = \rho_в g h_в = \rho_в g(h_м - \Delta h) = \rho_в g h_м - \rho_в g \Delta h. \tag{8.10.1}$$

Теперь представим, что на левый поршень положили груз массы M и при этом уровни воды и масла сравнялись. Тогда уравнение (8.10.1) преобразуется:

$$\frac{Mg}{S} + \rho_м g h_м = \rho_в g h_м. \tag{8.10.2}$$

Сравнивая уравнения (8.10.1) и (8.10.2) получаем, что:

$$\frac{Mg}{S} = \rho_в g \Delta h \quad \Rightarrow \quad M = \rho_в h S.$$

Подставляя числа из условия, получаем $M = 60$ г.

Ответ: $M = 60$ г.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

1) (1 балл) Минимальную силу Винни-Пух будет прикладывать в том случае, когда сила тяги, действующая на ящик, будет равна силе трения. Рассмотрим две ситуации:

1) В начале пути.
В этом случае на ящик действует сила трения $F_{\text{тр}}$ и сила натяжения нити T. Для того, чтобы ящик двигался равномерно, достаточно, чтобы $T = F_{\text{тр}}$. С такой же силой должен тянуть Винни-Пух за эту нитку, то есть Винни-пух должен тянуть с силой $T = (M + m)g\mu$, где M — масса меда в ящике, m — масса ящика, μ — коэффициент трения.
2) В конце пути.
В этом случае на ящик действует сила трения $F_{\text{тр}}$ и две одинаковые силы натяжения нити — со стороны того конца, который держит Винни-Пух, и со стороны конца, привязанного к ящику. Заметим, что сила трения ящика о землю осталась прежней, так как хоть из ящика и вытек весь мед, но зато на нем сидит Винни-пух такой же массы. То есть сила натяжения нити $T = (M + m)g\mu/2$. Именно с такой силой Винни-Пух должен тянуть за эту нитку, чтобы ящик ехал.

Получается, что в начале пути Винни-пух прикладывает в 2 раза большие усилия, чем в конце.

Ответ: в 2 раза.

Примечание. Ответ 0,5 засчитывался наравне с ответом 2, так как жюри посчитало, что в этом случае задача решена верно, просто было найдено не отношение силы в начале к силе в конце, а отношение силы в конце к силе в начале.

2) (1 балл) Когда шарик достигнет верхней точки бруска, его скорость относительно бруска будет направлена вертикально вверх, то есть горизонтальные скорости бруска и шарика v_x будут равны друг другу. Так как трение между землей и бруском отсутствует, мы можем найти эту скорость по закону сохранения импульса:

$$mv = (M + m)v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{mv}{M + m}.$$

Для нахождения вертикальной скорости шарика v_y применим закон сохранения энергии(вся энергия остается механической, так как трение в системе отсутствует):

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Mv_x^2}{2} + \frac{m(v_y^2 + v_x^2)}{2} + mgR,$$

где $mv^2/2$ — начальная кинетическая энергия легкого шарика, $Mv_x^2/2$ — конечная кинетическая энергия бруска, $m(v_y^2 + v_x^2)/2$ — конечная кинетическая энергия шарика,

mgR — конечная потенциальная энергия шарика(который поднялся на R относительно начального уровня). Подставив данные из условия задачи, получаем, что $v_y = 0$ м/с, то есть вся скорость шарика будет горизонтальной. Относительно Земли его скорость будет равна $v_x = v/20 = 0{,}1$ м/c.

Ответ: $v_x = 0{,}1$ м/с.

3) **(2 балла)** КПД в данном случае определяется по формуле

$$\eta = \frac{c_{\text{ч}} m_{\text{ч}} \Delta T}{q m_{\text{д}}},$$

где $c_{\text{ч}}$ — теплоемкость чая, $m_{\text{ч}}$– масса чая, $\Delta T = 80°\text{C}$ — изменение температуры чая, $m_{\text{д}}$ — общая масса дров, которые необходимо подложить в костер, чтобы нагреть чай на ΔT.

Обозначив за G скорость подкладывания дров (кг/с), можем записать $m_{\text{д}} = Gt$, где t — время, в течение которого дрова кидали в костер. Таким образом:

$$t = \frac{c_{\text{ч}} m_{\text{ч}} \Delta T}{q G \eta}.$$

Для того, чтобы время t было минимальным, нужно по графику подобрать значения η и G так, чтобы их произведение $G\eta$ было максимальным. Из рисунка видно, что этому соответствует точка $\eta = 0{,}04$, $G = 40$ г/с. Переводя все численные величины в систему СИ, найдем $t_{\min} = 105$ с.

Ответ: $t_{\min} = 105$ с.

4) **(2 балла)** Для начала заметим, что лягушке следует прыгать под углом 45° к горизонту, чтобы развивать прыжки с наибольшей дальностью полета. Поскольку лента имеет конечную массу, и трение между лентой и полом отсутствует, то, пока лягушка летит, вследствие закона сохранения импульса лента скользит в противоположную сторону со скоростью

$$u = \frac{m}{M} v_0 \cos 45°.$$

Перейдем в систему отсчета ленты. В этой системе отсчета лягушка за один прыжок пролетает расстояние

$$l = (v_0 \cos 45° + u)\, t = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{v_0^2}{g},$$

где $t = 2v_0 \sin 45°/g$ — время прыжка.

Таким образом, минимальное число прыжков лягушки будет равно

$$N = \frac{L}{l} = \frac{gL}{v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)} = 36.$$

Ответ: $N = 36$.

Примечание. Если бы лента имела массу во много раз большую, чем масса лягушки, то тогда бы можно было пренебречь ее движением. В этом случае мы бы получили $N = 40$ (за этот ответ ставился **1 балл**).

5) (1 балл) Введем коэффициент пропорциональности k между разностью температур ванны и окружающей среды и мощностью теплопотерь, то есть, согласно примечанию к условию, $P = K(T - T_0)$.

Теперь найдем эту величину k, исходя из первых измерений Леопольда. В это время в воде не было никакого обогревателя, то есть вода охлаждалась исключительно из-за теплопотерь, при чем их мощность можно найти по формуле:

$$P_1 = \frac{\Delta Q}{t} = \frac{cm\Delta T}{t}.$$

Подставляем в эту формулу удельную теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг$\cdot$°C), ее массу $m = 10$ кг, изменение температуры $\Delta T = 1$°C и время $t = 5$ с и получаем мощность теплопотерь $P_1 = 8400$ Вт. Отсюда находим коэффициент k:

$$k = \frac{P_1}{T_1 - T_0} = \frac{8400\ \text{Вт}}{50^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}} = 280\ \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}.$$

Теперь рассмотрим, что будет происходить, если Леопольд подключит нагреватель. По истечению долгого времени установится равновесие между количеством теплоты, которое поступает в воду от нагревателя, и тем, которое уходит от нее в окружающую среду. То есть

$$P_2 = k(T_2 - T_0).$$

Отсюда, зная коэффициент k, мощность нагревателя P_2 и температуру T_0, найдем установившуюся температуру:

$$T_2 = T_0 + \frac{P_2}{k} = 25^\circ\text{C}.$$

Ответ: $T_2 = 25$°C.

6) (1 балл) Так как Гарри Поттер определил, что при подключении к палочке напряжения $U = 0{,}12$ В выделяется мощность $P = 200$ Вт, то по закону Джоуля-Ленца мы можем найти, чему равно электрическое сопротивление палочки:

$$R = \frac{U^2}{P} = 7{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{Ом}.$$

Пусть l_1 — длина серебряной части палочки, $L - l_1$ — длина алюминиевой части. Тогда:

$$\frac{k_1 l_1 + k_2(L - l_1)}{S} = R,$$

где k_1 — удельное сопротивление серебра, k_2 — удельное сопротивление алюминия, S — площадь сечения палочки. В этом уравнении нам известно все, кроме l_1, поэтому мы можем его найти по формуле:

$$l_1 = \frac{k_2 L - SR}{k_2 - k_1}.$$

Подставим данные из условия, считая длину в метрах, а площадь — в мм^2. Получаем $l_1 = 0{,}1$ м $= 10$ см.

Ну и теперь, зная длину серебряного и алюминиевого участков палочки, площадь ее сечения и плотность алюминия и серебра, легко найдем массу палочки:

$$m = \big(\rho_1 l_1 + \rho_2(L - l_1)\big)S = 162 \text{ г}.$$

Ответ: $m = 162$ г.

7) (1 балл) Тепло, которое выделится от охлаждения горячего песка, сначала нагреет всю воду до температуры 100°C, а затем вскипятит часть этой воды. При этом, пока не вскипит вся вода, в системе установится температура $T_1 = 100°\text{C}$. Отсюда напишем уравнение теплового баланса:

$$c_\text{п} m_\text{п}(T - T_1) = c_\text{в} m_\text{в}(T_1 - T_0) + L m_\text{пар},$$

где $m_\text{в}$ — масса всей воды, а $m_\text{пар}$ — масса испарившейся.

Заметим, что $m_\text{п} = vt$, где v — скорость, с которой насыпают песок; t — время падения. Из этого уравнения находим массу испарившейся воды:

$$m_\text{пар} = \frac{c_\text{п} vt(T - T_1) - c_\text{в} m_\text{в}(T_1 - T_0)}{L}.$$

Подставляя данные из условия, находим $m_\text{пар} = 0{,}007$ кг $= 7$ г.

Таким образом, в сосуде осталось $100 - 7 = 93$ мл воды, однако на дне этого сосуда теперь лежит песок, и необходимо посчитать, какой объем занимает он:

$$V_\text{п} = \frac{m_\text{п}}{\rho_\text{п}} = \frac{vt}{\rho_\text{п}} = 175 \text{ см}^3 = 175 \text{ мл}.$$

Итоговый объем песка и воды:

$$V = V_\text{п} + V_\text{в} = (175 + 93) \text{ мл} = 268 \text{ мл}.$$

Ответ: $V = 268$ мл.

8) (2 балла) Пусть напряжение источника — U, сопротивления двух резисторов — R_1 и R_2, коэффициент теплоотдачи окружающей среде — k. Тогда то, что в первом опыте установилась температура $T_1 = 30°\text{C}$ означает, что:

$$\frac{U^2}{R_1} = k(T_1 - T_0), \tag{9.8.1}$$

где U^2/R_1 — мощность, выделяемая на резисторе R_1, найденная по закону Джоуля-Ленца, $k(T_1 - T_0)$ — мощность теплоотдачи окружающей среде.

Когда мы подключим резистор R_2 параллельно резистору R_1, на каждом из них будет то же самое напряжение U, а мощности, выделяемые на них, будут суммироваться. Сумма их мощностей во втором опыте должна будет равна мощности теплоотдачи окружающей среде, то есть:

$$\frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} = k(T_2 - T_0). \tag{9.8.2}$$

Разделим (9.8.2) на (9.8.1), получим:

$$R_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{T_2-T_0}{T_1-T_0}.$$

Приводя к общему знаменателю, сокращая и подставляя значения температур из условия, получаем:

$$\frac{R_2+R_1}{R_2}=\frac{T_2-T_0}{T_1-T_0}=3 \quad\Rightarrow\quad R_2=\frac{R_1}{2}.$$

Теперь рассмотрим, что будет происходить в третьем опыте. В третьем опыте экспериментатор Глюк подключил сопротивления R_1 и R_2 последовательно друг другу, а значит, на них будет выделяться мощность:

$$P_3=\frac{U^2}{R_1+R_2}=\frac{U^2}{R_1+\frac{1}{2}R_1}=\frac{2U^2}{3R_1}.$$

Но эта мощность должна равняться мощности теплоотдаче окружающей среде. То есть:

$$\frac{2U^2}{3R_1}=k(T_3-T_0). \tag{9.8.3}$$

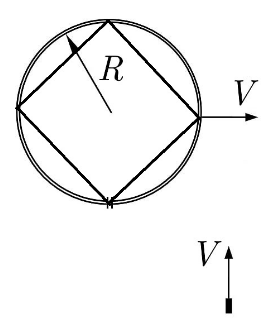
Разделим уравнение (9.8.3) на уравнение (9.8.1), получим:

$$\frac{T_3-T_0}{T_1-T_0}=\frac{2}{3}.$$

То есть $T_3=20°\mathrm{C}$.

Ответ: $T_3=20°\mathrm{C}$.

9) (1 балл) Перейдем в систему отсчета сферы. В ней пулька движется со скоростью $V\sqrt{2}$, направленной под углом 45° к радиусу сферы. Такая пулька опишет внутри сферы траекторию, состоящую из четырех одинаковых хорд, прежде чем выскочит в то же отверстие, в которое влетела. Длина каждой из этих четырех хорд — $R\sqrt{2}$, скорость пульки в системе отсчета сферы — $V\sqrt{2}$, таким образом, время, которое пулька проведет внутри сферы:



$$t=\frac{4R\sqrt{2}}{V\sqrt{2}}=\frac{4R}{v}.$$

Осталось подставить значения из условия.

Ответ: $t=0{,}2$ с.

10) (2 балла) Площадь сечения струи при вытекании из крана будет уменьшаться, так как скорость движения воды увеличивается(под воздействием силы земного притяжения), а поток должен оставаться прежним — то есть через сечение струи за одно и то же время проходит одно и то же количество воды. Поток воды через сечение струи равен произведению скорости движения воды на площадь этого сечения. То есть:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{9.10.1}$$

Выразим скорость v_2 в точке на h ниже крана через скорость на выходе из крана v_1 и высоту h. Для этого запишем закон сохранения энергии для капли воды в струе:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh = \frac{mv_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 + 2gh = v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}. \tag{9.10.2}$$

Подставим формулу (9.10.2) в уравнение (9.10.1):

$$S_1 v_1 = S_2 \sqrt{v_1^2 + 2gh}.$$

Теперь перейдем от площадей сечения струи к ее диаметру, для этого выразим площади через диаметры по формуле $S = \pi d^2/4$:

$$\frac{\pi d_1^2 v_1}{4} = \frac{\pi d_2^2 \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{4}.$$

Из этого уравнения выражаем искомый диаметр d_2:

$$d_2 = \sqrt{\frac{v_1 d_1^2}{\sqrt{v_1^2 + 2gh}}}.$$

Подставляя данные из условий и округляя до десятых, находим:

$$d_2 \approx 2{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $d_2 = 2{,}5$ см.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

1) (1 балл) Высота, на которую поднимается центр масс школьника при качаниях, равна $H = L(1-\cos\theta)$, где L — расстояние от перекладины до центра масс. Тогда из закона сохранения энергии следует, что скорость центра масс в низшей точке траектории равна $v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$. Сила, с которой школьник действует на перекладину в низшей точки траектории, равна

$$P = m\left(g + \frac{v^2}{L}\right).$$

С другой стороны, мы знаем, что $P_{\max} = 3mg$. Таким образом, мы находим, что $\cos\theta = 0$, то есть максимальный угол качаний школьника равен $90°$.

Ответ: $\theta_{\max} = 90°$.

2) (1 балл) Обозначим за a длину ребра куба. Тогда, из правила моментов для первой ситуации, пока куб был приклеен, можем записать

$$m_{\text{в}}g\frac{a}{2} + m_{\text{п}}g\frac{3a}{2} = FL,$$

где L — плечо силы F. Поскольку объемы воды и куба равны, а плотности различаются в 5 раз, то $m_{\text{в}} = 5m_{\text{п}}$. Таким образом, $4m_{\text{п}}ga = FL$.

Рассмотрим теперь вторую ситуацию, когда куб отклеился. Вода так и продолжит давить на дно емкости, однако, суммарная сила тяжести $m_{\text{в}}g$ будет приложена к центру дна емкости. Куб уже не касается дна, но на него будет действовать сила Архимеда со стороны жидкости. Но тогда, согласно третьему закону Ньютона, и сам куб будет действовать на жидкость с точно такой же по модулю силой. Поэтому суммарная сила, действующая на дно емкости — это $F_A + m_{\text{в}}g$. Но из условия равновесия куба имеем $F_A = m_{\text{п}}g$, поэтому правило моментов запишется как $6m_{\text{п}}ga = F'L$.

Сопоставляя полученные формулы, находим, что $F' = 3F/2 = 24$ Н.

Ответ: $F' = 24$ Н.

3) (2 балла) На Пятачка действуют сила трения скольжения, сила реакции опоры и сила тяжести. Причем векторная сумма первых двух сил направлена по вертикали и компенсирует силу тяжести как до, так и после выстрела. До выстрела (и после выстрела) Пятачка это связано с тем, что равнодействующая силы трения и силы реакция опоры направлена строго вертикально, компенсируя действие силы тяжести, так как Пятачок движется с постоянной скоростью. В момент выстрела изменяется как сила реакции опоры N, так и сила трения $F_{\text{тр}}$, но так как они друг другу пропорциональны, то есть $F_{\text{тр}} = \mu N$, то их равнодействующая по-прежнему будет направлена вертикально. Таким образом, импульс системы «Пятачок-ружье-пуля» сохраняется в горизонтальном направлении, поскольку все вышеперечисленные силы в сумме дают нулевую проекцию на горизонталь.

Итак, запишем закон сохранения импульса в проекции на направление, перпендикулярное силе тяжести:

$$(m + M)u \cos\alpha = MV \cos\alpha - mv \cos(\alpha + \beta),$$

где $M = 0{,}9$ кг — масса Пятачка с пустым ружьем, $m = 0{,}1$ кг — масса пули, $u = 5$ м/с — скорость Пятачка до выстрела, V — скорость Пятачка после выстрела, $v = 20$ м/с — скорость пули.

Отсюда, скорость Пятачка равна

$$V = \left(1 + \frac{m}{M}\right) u + \frac{mv}{M} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}.$$

Подставляя данные задачи, найдем $V = 6{,}8$ м/с, или $V \approx 7$ м/с.

Ответ: $V \approx 7$ м/с.

4) (2 балла) Для решения задачи воспользуемся вторым законом Ньютона, записанным в виде

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum_i F_i,$$

где справа стоит сумма всех внешних сил, действующих на тело, и изменяющих его импульс p на величину Δp в течение некоторого промежутка времени Δt. Расписывая все силы, и перенося в Δt вправо, получим

$$\Delta p = (F_A - mg)\Delta t - kv\Delta t = (F_A - mg)\Delta t - k\Delta z,$$

поскольку $v\Delta t = \Delta z$ — изменение вертикальной координаты шарика. Ось z направлена вертикально вверх, и ее начало совпадает с исходным положением шарика, а свободная поверхность находится на высоте $z = H$.

Полученное уравнение справедливо уже для любых Δt и Δz, так как в правой части уравнения все остальные величины являются константами. Взяв $\Delta t = t$ и $\Delta z = H$, найдем

$$v = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) gt - \frac{k}{m} H.$$

Величина k определяется из условия $mg + kv_0 = F_A$, то есть $k = (\rho_0 - \rho)gV/v_0$. Таким образом

$$v = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)\left(t - \frac{H}{v_0}\right) g. \tag{10.4.1}$$

Подставляя числа, получим $v = 0{,}25$ м/с. Заметим, что $v < v_0$, как и должно быть (то есть шарик не успел разогнаться до установившейся скорости).

Ответ: $v = 0{,}25$ м/с.

Примечание. Мы должны извиниться за то, что в условии дали H и t, которые не соответствуют друг другу (это связано с опечаткой в условии: установившаяся скорость v_0 должна была быть равной не 3 м/с, а 4 м/с). Точное решение с $v_0 = 3$ м/с дает $H = 9{,}5$ м при $t = 4{,}1$ с. В этом еще можно убедится и так: максимальное ускорение шарика (обусловленное только разностью силы Архимеда и силы тяжести, без учета силы сопротивления) составляет $a = g/4 = 2{,}5$ м/с^2. За время $t_1 = v_0/a = 1{,}2$ с, этот шарик достигнет скорости v_0, пройдя при этом расстояние $v_0^2/2a = 1{,}8$ м. Далее, если считать движение шарика равномерным со скоростью v_0, то за оставшиеся 2,9 секунды он пройдет расстояние 8,7 метра. Таким образом, за общее время $t = 4{,}1$ с шарик пройдет расстояние $H = 10{,}5$ метра. На опечатку указал участник олимпиады Ахундзянов Амир (СПб, ФТШ 9 класс). К счастью, на вывод формулы (10.4.1) значения H и t никак не влияют, и решить задачу можно было и с теми значениями величин, что даны в условии.

5) **(2 балла)** При ударе об стену, стержень упруго отразится, и будет двигаться от стены со скоростью v. Однако грузик внутри стержня не сразу отреагирует, и все еще будет двигаться по направлению к стенке со скоростью v до тех пор, пока не сожмется пружина. Таким образом, сразу после удара полный импульс стержня с грузиком в проекции на горизонтальную ось, направленную от стены, равен $P = (M-m)v$. По истечении некоторого промежутка времени колебания грузика внутри стержня прекратятся (за счет трения), однако импульс системы останется тем же самым (так как внешних сил нет), и мы получим $P = (M+m)u$, где u — искомая скорость стержня с грузиком. Таким образом,

$$u = v \cdot \frac{M-m}{M+m} = \frac{v}{2} = 6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = 6$ м/с.

6) **(1 балл)** КПД в данном случае определяется по формуле

$$\eta = \frac{c_\text{ч} m_\text{ч} \Delta T}{q m_\text{д}},$$

где $c_\text{ч}$ — теплоемкость чая, $m_\text{ч}$ — масса чая, $\Delta T = 80°\text{C}$ — изменение температуры чая, $m_\text{д}$ — общая масса дров, которые необходимо подложить в костер, чтобы нагреть чай на ΔT.

Обозначив за G скорость подкладывания дров (кг/с), можем записать $m_\text{д} = Gt$, где t — время, в течение которого дрова кидали в костер. Таким образом

$$t = \frac{c_\text{ч} m_\text{ч} \Delta T}{q G \eta}.$$

Для того, чтобы время t было минимальным, нужно по графику подобрать значения η и G так, чтобы их произведение $G\eta$ было максимальным. Из рисунка видно, что этому соответствует точка $\eta = 0{,}04$, $G = 40$ г/с. Переводя все численные величины в систему СИ, найдем $t_{\min} = 105$ с.

Ответ: $t_{\min} = 105$ с.

7) **(2 балла)** Для начала заметим, что лягушке следует прыгать под углом 45° к горизонту, чтобы развивать прыжки с наибольшей дальностью полета. Поскольку лента имеет конечную массу, и трение между лентой и полом отсутствует, то, пока лягушка летит, вследствие закона сохранения импульса лента скользит в противоположную сторону со скоростью

$$u = \frac{m}{M} v_0 \cos 45^\circ.$$

Перейдем в систему отсчета ленты. В этой системе отсчета лягушка за один прыжок пролетает расстояние

$$l = (v_0 \cos 45^\circ + u)\, t = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{v_0^2}{g},$$

где $t = 2v_0 \sin 45^\circ / g$ — время прыжка.

Таким образом, минимальное число прыжков лягушки будет равно

$$N = \frac{L}{l} = \frac{gL}{v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)} = 36.$$

Ответ: $N = 36$.

Примечание. Если бы лента имела массу во много раз большую, чем масса лягушки, то тогда бы можно было пренебречь ее движением. В этом случае мы бы получили $N = 40$ (за который ставился **1 балл**).

8) **(2 балла)** Количество теплоты, проходящее в единицу времени через слой материала толщины d в результате теплопроводности, определяется по формуле

$$Q = \frac{\lambda}{d} \Delta T S,$$

где λ — коэффициент теплопроводности, ΔT — перепад температур по обе стороны слоя материала, S — площадь поперечного сечения слоя материала.

Для слоя воды и для слоя льда мы можем записать:

$$Q_1 = \frac{\lambda_1}{d_1}(T_1 - T_0)S, \qquad Q_2 = \frac{\lambda_2}{d_2}(T_0 - T_2)S.$$

Здесь $T_0 = 0^\circ$, так как граница воды и льда находится при температуре плавления льда, и $d = d_1 + d_2$ — общая длина трубы.

Поскольку в трубе поток тепла не рождается и не исчезает (нет источников или стоков тепла), то через каждое сечение трубы в единицу времени проходит одинаковое количество теплоты. Отсюда следует, что $Q_1 = Q_2$, и мы находим

$$\frac{d_2}{d} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{T_1 - T_0}{T_0 - T_2}}.$$

Подставляя данные задачи, получаем $\delta_{\text{лед}} = d_2/d = V_2/V = 0{,}8$, то есть лед занимает 80% объема трубы. Следовательно, вода (расплавленный лед) занимает 20% объема трубы.

Ответ: $\delta_{\text{вода}} = 20\%$, $\delta_{\text{лед}} = 80\%$.

Примечание. Если вы ввели ответ 80, то мы посчитали, что вы решали задачу правильно, но просто по невнимательности ввели процентное содержание льда, поэтому также засчитывали ответ.

9) **(3 балла)** Для решения задачи нужно воспользоваться балансом массы. На входе в трубу в единицу времени поступает масса жидкости $\Delta m = \rho v S$, где ρ — плотность жидкости, v — искомая скорость, S — площадь сечения трубы. На выходе из трубы в единицу времени выходит некоторая масса пара, вычисляемая по формуле $\Delta m_1 = \rho_1 v_1 S/2$, где $S/2$ — площадь сечения трубы над перегородкой, $\rho_1 = \rho/1000$ — плотность пара. Аналогично, для жидкости на выходе имеем $\Delta m_2 = \rho v_2 S/2$. Поскольку масса сохраняется, то $\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2$, и искомая скорость жидкости равна

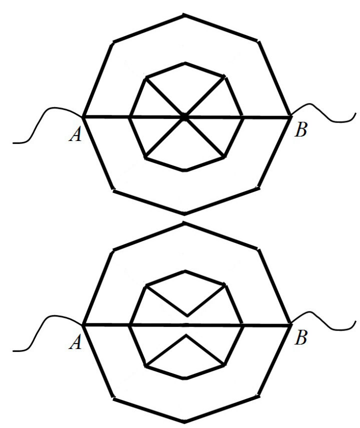
$$v = \frac{(\rho_1/\rho)v_1 + v_2}{2}.$$

Подставляя числа, находим $v = 0{,}3$ м/с.

Ответ: $v = 0{,}3$ м/с.

Примечание. Если вы в качестве ответа привели среднее арифметическое скоростей, то вам был начислен **1 балл**.

10) **(2 балла)** Исходя из симметрии задачи, можно заключить, что ток по вертикальным ребрам в середине схемы не течет (и потенциалы всех точек на этих ребрах равны). Также соединение в центре паутинки можно расщепить (см. рисунок).



Теперь, вычисляя общее сопротивление, и используя формулы для параллельного и последовательного соединений, получим $R_{\text{общ}} = 20R/17 = 20$ Ом.

Ответ: $R_{\text{общ}} = 20R/17 = 20$ Ом.

Примечание. Если вы увлеклись, и помимо вертикальных ребер убрали еще 4 ребра (которые не горизонтальны) из центрального соединения схемы, и получили ответ $R_{\text{общ}} = 6R/5 = 20{,}4$ Ом, то вам был начислен **1 балл**.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

1) (1 балл) Высота, на которую поднимается центр масс школьника при качаниях, равна $H = L(1 - \cos\theta)$, где L — расстояние от перекладины до центра масс. Тогда из закона сохранения энергии следует, что скорость центра масс в низшей точке траектории равна $v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$. Сила, с которой школьник действует на перекладину в низшей точки траектории, равна

$$P = m\left(g + \frac{v^2}{L}\right).$$

С другой стороны, мы знаем, что $P_{\max} = 3mg$. Таким образом, мы находим, что $\cos\theta = 0$, то есть максимальный угол качаний школьника равен $90°$.

Ответ: $\theta_{\max} = 90°$.

2) (4 балла) Через большое время после замыкания ключа установится равновесие, и токи через конденсаторы течь не будут. Общий ток в цепи можно найти из закона Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 0{,}5\ \text{А}.$$

Это и будет искомый ток через резисторы ($I_1 = I_2 = I$).

Чтобы определить заряды на конденсаторах, нужно сначала найти на них напряжения. Конденсатор C_1 соединен параллельно с резистором R_1, следовательно, на них одинаковые напряжения. Так как по закону Ома для участка цепи имеем $U_1 = IR_1$, то заряд на первом конденсаторе равен $q_1 = C_1U_1 = C_1IR_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл или $q_1 = 0{,}5$ нКл. Аналогично $q_2 = C_2IR_2 = 1{,}5$ нКл.

Ответ: $I_1 = I_2 = 0{,}5$ А, $q_1 = 0{,}5$ нКл, $q_2 = 1{,}5$ нКл.

Примечание. За каждое правильно посчитанное значение вы получали по 1 баллу. Если же вы перепутали значения q_1 и q_2, то вы получали **1 балл** вместо двух.

3) (2 балла) На Пятачка действуют сила трения скольжения, сила реакции опоры и сила тяжести. Причем векторная сумма первых двух сил направлена по вертикали и компенсирует силу тяжести как до, так и после выстрела. До выстрела (и после выстрела) Пятачка это связано с тем, что равнодействующая силы трения и силы реакция опоры направлена строго вертикально, компенсируя действие силы тяжести, так как Пятачок движется с постоянной скоростью. В момент выстрела изменяется как сила реакции опоры N, так и сила трения $F_{\text{тр}}$, но так как они друг другу пропорциональны, то есть $F_{\text{тр}} = \mu N$, то их равнодействующая по-прежнему будет направлена вертикально.

Таким образом, импульс системы «Пятачок-ружье-пуля» сохраняется в горизонтальном направлении, поскольку все вышеперечисленные силы в сумме дают нулевую проекцию на горизонталь.

Итак, запишем закон сохранения импульса в проекции на направление, перпендикулярное силе тяжести:

$$(m+M)u\cos\alpha = MV\cos\alpha - mv\cos(\alpha+\beta),$$

где $M = 0{,}9$ кг — масса Пятачка с пустым ружьем, $m = 0{,}1$ кг — масса пули, $u = 5$ м/с — скорость Пятачка до выстрела, V — скорость Пятачка после выстрела, $v = 20$ м/с — скорость пули.

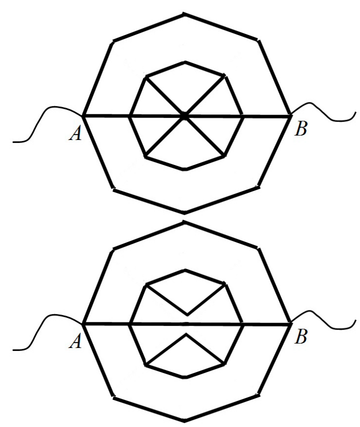
Отсюда, скорость Пятачка равна

$$V = \left(1+\frac{m}{M}\right)u + \frac{mv}{M}\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Подставляя данные задачи, найдем $V = 6{,}8$ м/с, или $V \approx 7$ м/с.

Ответ: $V \approx 7$ м/с.

4) **(2 балла)** Исходя из симметрии задачи, можно заключить, что ток по вертикальным ребрам в середине схемы не течет (и потенциалы всех точек на этих ребрах равны). Также соединение в центре паутинки можно расщепить (см. рисунок).
Теперь, вычисляя общее сопротивление, и используя формулы для параллельного и последовательного соединений, получим $R_{\text{общ}} = 20R/17 = 20$ Ом.
Ответ: $R_{\text{общ}} = 20R/17 = 20$ Ом.
Примечание. Если вы увлеклись, и помимо вертикальных ребер убрали еще 4 ребра (которые не горизонтальны) из центрального соединения схемы, и получили ответ $R_{\text{общ}} = 6R/5 = 20{,}4$ Ом, то вам был начислен **1 балл**.



5) **(2 балла)** Для решения задачи воспользуемся вторым законом Ньютона, записанным в виде

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum_i F_i,$$

где справа стоит сумма всех внешних сил, действующих на тело, и изменяющих его импульс p на величину Δp в течение некоторого промежутка времени Δt. Расписывая все силы, и перенося в Δt вправо, получим

$$\Delta p = (F_A - mg)\Delta t - kv\Delta t = (F_A - mg)\Delta t - k\Delta z,$$

поскольку $v\Delta t = \Delta z$ — изменение вертикальной координаты шарика. Ось z направлена вертикально вверх, и ее начало совпадает с исходным положением шарика, а свободная поверхность находится на высоте $z = H$.

Полученное уравнение справедливо уже для любых Δt и Δz, так как в правой части уравнения все остальные величины являются константами. Взяв $\Delta t = t$ и $\Delta z = H$, найдем

$$v = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) gt - \frac{k}{m}H.$$

Величина k определяется из условия $mg + kv_0 = F_A$, то есть $k = (\rho_0 - \rho)gV/v_0$. Таким образом

$$v = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)\left(t - \frac{H}{v_0}\right) g. \tag{11.5.1}$$

Подставляя числа, получим $v = 0{,}25$ м/с. Заметим, что $v < v_0$, как и должно быть (то есть шарик не успел разогнаться до установившейся скорости).

Ответ: $v = 0{,}25$ м/с.

Примечание. Мы должны извиниться за то, что в условии дали H и t, которые не соответствуют друг другу (это связано с опечаткой в условии: установившаяся скорость v_0 должна была быть равной не 3 м/с, а 4 м/с). Точное решение с $v_0 = 3$ м/с дает $H = 9{,}5$ м при $t = 4{,}1$ с. В этом еще можно убедится и так: максимальное ускорение шарика (обусловленное только разностью силы Архимеда и силы тяжести, без учета силы сопротивления) составляет $a = g/4 = 2{,}5$ м/с^2. За время $t_1 = v_0/a = 1{,}2$ с, этот шарик достигнет скорости v_0, пройдя при этом расстояние $v_0^2/2a = 1{,}8$ м. Далее, если считать движение шарика равномерным со скоростью v_0, то за оставшиеся 2,9 секунды он пройдет расстояние 8,7 метра. Таким образом, за общее время $t = 4{,}1$ с шарик пройдет расстояние $H = 10{,}5$ метра. На опечатку указал участник олимпиады Ахундзянов Амир (СПб, ФТШ 9 класс). К счастью, на вывод формулы (11.5.1) значения H и t никак не влияют, и решить задачу можно было и с теми значениями величин, что даны в условии.

6) (2 балла) Заряд между шарами 1 и 2 будет распределяться так, пока потенциалы шаров не станут одинаковыми. И действительно, если бы потенциалы были разными, то между шарами возникло бы электрическое поле, которое заставляло двигаться заряд по проводнику до тех пор, пока потенциалы шаров не выровняются.

Обозначим за q_1 и q_2 заряды шаров 1 и 2 соответственно. Тогда, равенство потенциалов можно записать следующим образом:

$$k\frac{q_1}{R} + k\frac{q_2}{L} + k\frac{Q_3}{\sqrt{L^2 + d^2}} = k\frac{q_2}{R} + k\frac{q_1}{L} + k\frac{Q_3}{d},$$

где в левой части равенства первое слагаемое отвечает за потенциал первого шара, второе — за потенциал второго шара в точке, где находится центр первого шара, третье — за потенциал третьего шара в точке, где находится центр первого шара. В правой части все аналогично.

Для определения зарядов q_1 и q_2 требуется еще одно уравнение. Из закона сохранения заряда следует, что

$$q_1 + q_2 = Q_1.$$

Подставив числа, найдем $q_1 = 1{,}1$ Кл, $q_2 = 0{,}9$ Кл. Также, мы видим, что $q_1 > q_2$, то есть третий шар своим полем отталкивает заряды, «мешая» им находится во втором шаре.

Ответ: $q_1 = 1{,}1$ Кл, $q_2 = 0{,}9$ Кл.

Примечание. За каждое правильно посчитанное значение вы получали по 1 баллу. Однако, если вы не получили правильный ответ, но вы знакомы с законом сохранения заряда, и ваши ответы удовлетворяют равенству $q_1 + q_2 = 2$ Кл, то вам начислялся **1 балл**.

7) (2 балла) Поскольку у идеального газа внутренняя энергия зависит только от температуры (но не от давления или объема), то ее максимальное значение определяется максимальным значением температуры. На $p - V$ диаграмме точки пересечения различных изотерм с процессом 1–2 будут давать различные температуры, и максимальной температуре будет соответствовать изотерма, которая касается полуокружности 1–2 в точке A. Из симметрии легко найти координаты этой точки: $\pi_m = \pi_c + R/\sqrt{2}$ и $v_m = v_c + R/\sqrt{2}$, где $\pi_c = v_c = 2$ и $R = 1$. Тогда, внутренняя энергия

$$U_{\max} = \frac{3}{2}RT_{\max} = \frac{5}{2}(pV)_{\max} = \frac{3}{2}p_0V_0\pi_m v_m = \frac{3}{2}p_0V_0 \cdot \left(\frac{9+4\sqrt{2}}{2}\right).$$

Подставляя числа, получаем $U_{\max} \approx 4 \cdot 10^6$ Дж.

Работа вычисляется как площадь под кривой 1–2, то есть сумме площадей полукруга радиуса R и прямоугольника со сторонами $2R$ и π_c. Также, чтобы ответ был размерным, нужно умножить его на p_0V_0. В итоге получим $A = 22{,}3 \cdot 10^5 \approx 2 \cdot 10^6$ Дж.

Ответ: $U_{\max} = 4$ МДж, $A = 2$ МДж.

Примечание. За каждое правильно посчитанное значение вы получали по 1 баллу.

8) (2 балла) При ударе об стену, стержень упруго отразится, и будет двигаться от стены со скоростью v. Однако грузик внутри стержня не сразу отреагирует, и в первый момент все еще будет двигаться по направлению к стенке со скоростью v (потом убывающей) до тех пор, пока не сожмется пружина. Таким образом, сразу после удара полный импульс стержня с грузиком в проекции на горизонтальную ось, направленную от стены, равен $P = (M - m)v$. По истечении некоторого промежутка времени колебания грузика внутри стержня прекратятся (за счет трения), однако импульс системы останется тем же самым (так как внешних сил нет) и мы получим $P = (M + m)u$, где u — искомая скорость стержня с грузиком. Таким образом,

$$u = v \cdot \frac{M-m}{M+m} = \frac{v}{3} = 4 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = 4$ м/с.

9) (2 балла) Из условия задачи следует, что количество энергии, излучаемой плоскостью в единицу времени, определяется по формуле $\Delta E = AT^4$, где A — некоторая постоянная величина. На среднюю плоскость с двух сторон падает излучение, которое она поглощает, за счет чего нагревается и сама излучает. В состоянии термодинамического равновесия можем записать

$$AT_1^4 + AT_2^4 = 2AT^4,$$

причем здесь везде одна и та же константа A, так как все плоскости одинаковые, и в правой части равенства добавлена двойка, так как плоскость излучает в обе стороны. Отсюда

$$T = \left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}\right)^{1/4}.$$

Подставляя числа и округляя, находим $T \approx 264$ К.

Ответ: $T = 264$ К.

Примечание. Если вы в своем решении не поняли, что плоскость излучает в обе стороны, но правильно написали уравнение теплового баланса и получили $T \approx 314$ К, вам был начислен **1 балл**.

10) **(3 балла)** Легко заметить, что точка пересечения движется вдоль столба. Следовательно и ее скорость направлена вдоль столба. Далее заметим, что расстояние от точки A до центра обруча O всегда одно и то же, и равно радиусу обруча. Таким образом, задача сводится к движению несжимаемой палочки AO.

Условие несжимаемости можно записать как равенство проекций скоростей концов палочки на ее направление, то есть

$$v \cos\beta = v_A \cos(\pi - \alpha - \beta).$$

Отсюда $v_A = v/\sqrt{2} \approx 5$ м/с.

Ответ: $v_A = 5$ м/с.