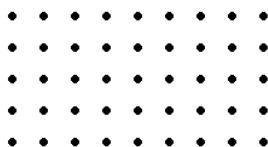




Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2018–2019 учбовий рік. Відбірковий етап

Задачі для 5 класу

1. Перемножили декілька однозначних чисел, серед яких немає ні двійок, ні п'ятірок. Чи могло вийти число, записане лише двійками та п'ятірками?
2. Дано сітку 5×9 точок (див. рисунок). Намалюйте 15 трикутників із вершинами в цих точках так, щоб жодні два трикутники не мали спільних точок.



3. На ялинці росло вдвічі більше шишок, ніж на сосні. Вася збив кілька шишок, і тепер на сосні росте втричі більше шишок, ніж на ялинці. Чи зможе Вася збити з цих дерев ще стільки ж шишок, скільки вже збив?
4. Мешканці Країни Чудес діляться на хоббітів і вікінгів. Одного разу 27 мешканців сіли за круглий стіл так, щоб відстані між сусідами були однаковими. Виявилось, що між кожними двома хоббітами сиділи як мінімум два вікінги. Доведіть, що знайдуться три вікінги, що сидять на однакових відстанях один від одного.
5. Числа від 1 до 49 розставлені в клітинах квадрата 7×7 так, що кількості непарних чисел у будь-яких двох рядках різні. Чи може виявитися, що кількості непарних чисел у будь-яких двох стовпцях теж різні?
6. Марк пропонує Вірі зіграти в таку гру. Спочатку Віра вибирає, хто з них зробить перший хід. Потім вони по черзі записують по одній будь-якій цифрі від 1 до 9. Повторювати цифри не можна. Якщо в якийсь момент виявиться, що якісь дві із записаних цифр в сумі дають третю (вже записану), то переможеним вважається гравець, який допустив таку ситуацію. Що повинна зробити Віра, щоб виграти?
7. У банкоматі лежать купюри в 100, 200, 500, 1000, 2000 і 5000 рублів. У Васі є картка, на якій лежить 10000 рублів. Вася хоче зняти з картки гроші, потім перейти до автомата з продажу квитків і купити в ньому квиток. Про квиток Васі відомо, що його ціна ділиться на 100 рублів і що вона не більше 10000 рублів. Автомат з продажу квитків здачі не видає. Чи може Вася зняти гроші в банкоматі не більше ніж в два прийоми так, щоб потім гарантовано купити квиток? (Знімаючи гроші в банкоматі, Вася може вказати суму, але не може вплинути на те, якими купюрами вона буде видана.)

- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призери відбіркового етапу будуть запрошені на заключний етап, що проходитиме в січні – лютому 2019 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але також її повне обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). У виняткових випадках ми готові прийняти роботу в паперовому вигляді (поштою). Докладні інструкції по відправці розв'язків є на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід** (особисті дані вказуються окремо при завантаженні роботи на сайт).
- Роботи з ознаками списування чи колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2018–2019 учбовий рік. Відбірковий етап

Задачі для 6 класу

1. Перемножили декілька однозначних чисел, серед яких немає ні двійок, ні п'ятірок. Чи могло вийти число, записане лише двійками та п'ятірками?
2. На ялинці росло вдвічі більше шишок, ніж на сосні. Вася збив кілька шишок, і тепер на сосні росте втричі більше шишок, ніж на ялинці. Чи зможе Вася збити з цих дерев ще стільки ж шишок, скільки вже збив?
3. Мешканці Країни Чудес діляться на хоббітів і вікінгів. Одного разу 27 мешканців сіли за круглий стіл так, щоб відстані між сусідами були однаковими. Виявилося, що між кожними двома хоббітами сиділи як мінімум два вікінги. Доведіть, що знайдуться три вікінги, що сидять на однакових відстанях один від одного.
4. Числа від 1 до 49 розставлені в клітинах квадрата 7×7 так, що кількості непарних чисел у будь-яких двох рядках різні. Чи може виявитися, що кількості непарних чисел у будь-яких двох стовпцях теж різні?
5. Для кожного чотиризначного числа без нулів у запису можна перелічити всі перестановки цифр, включаючи саме число, за зростанням. Наприклад, для числа 3433 вийде такий список: 3334, 3343, 3433, 4333. Назвемо число нещасним, якщо воно стоїть у своєму списку на 13-му місці. Скільки є нещасних чисел?
6. У банкоматі лежать купюри в 100, 200, 500, 1000, 2000 і 5000 рублів. У Васі є картка, на якій лежить 10000 рублів. Вася хоче зняти з картки гроші, потім перейти до автомата з продажу квитків і купити в ньому квиток. Про квиток Васі відомо, що його ціна ділиться на 100 рублів і що вона не більше 10000 рублів. Автомат з продажу квитків здачі не видає. Чи може Вася зняти гроші в банкоматі не більше ніж в два прийоми так, щоб потім гарантовано купити квиток? (Знімаючи гроші в банкоматі, Вася може вказати суму, але не може вплинути на те, якими купюрами вона буде видана.)
7. Чи можна розрізати квадрат на 144 однакові частини та скласти з них три квадрати, серед яких немає двох рівних?

• Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призери відбіркового етапу будуть запрошені на заключний етап, що проходить у січні – лютому 2019 року.

- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але також її повне обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). У виняткових випадках ми готові прийняти роботу в паперовому вигляді (поштою). Докладні інструкції по відправці розв'язків є на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід** (особисті дані вказуються окремо при завантаженні роботи на сайт).
- Роботи з ознаками списування чи колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2018–2019 учбовий рік. Відбірковий етап

Задачі для 7 класу

1. У п'ятизначному числі, що не містить нулів, стерли першу цифру, і воно зменшилося в цілу кількість разів. В отриманого числа знову стерли першу цифру, і воно знову зменшилося в цілу кількість разів. Потім першу цифру стирали ще двічі, і кожен раз число зменшувалося в цілу кількість разів. Наведіть приклад початкового числа.
2. Мешканці Країни Чудес діляться на хоббітів і вікінгів. Одного разу 27 мешканців сіли за круглий стіл так, щоб відстані між сусідами були однаковими. Виявилось, що між кожними двома хоббітами сиділи як мінімум два вікінги. Доведіть, що знайдуться три вікінги, що сидять на однакових відстанях один від одного.
3. Число можна подати як суму 8 простих чисел, але можна подати як суму 8 складених чисел. А чи можна це число подати як добуток простого числа на складене?
4. Числа від 1 до 49 розставлені в клітинах квадрата 7×7 так, що кількості непарних чисел у будь-яких двох рядках різні. Чи може виявитися, що кількості непарних чисел у будь-яких двох стовпцях теж різні?
5. Для кожного чотиризначного числа без нулів у запису можна перерахувати всі перестановки цифр, включаючи саме число, за зростанням. Наприклад, для числа 3433 вийде такий список: 3334, 3343, 3433, 4333. Назвемо число відмінним, якщо воно стоїть у своєму списку на п'ятому місці. Скільки існує відмінних чисел?
6. Три колекціонери картин A , B і C виставили частину своїх картин на аукціон. A виставив 3% своїх картин, B — 7%, C — 20%. B купив усі картини, виставлені A , C — виставлені B , A — виставлені C . Яка найменша (ненульова) кількість картин могла бути виставлена на аукціон, якщо кількість картин у кожного колекціонера не змінилася?
7. Чи можна розрізати квадрат на 144 однакові частини та скласти з них три квадрати, серед яких немає двох рівних?

- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призери відбіркового етапу будуть запрошені на заключний етап, що проходитиме в січні – лютому 2019 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але також її повне обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). У виняткових випадках ми готові прийняти роботу в паперовому вигляді (поштою). Докладні інструкції по відправці розв'язків є на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід** (особисті дані вказуються окремо при завантаженні роботи на сайт).
- Роботи з ознаками списування чи колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2018–2019 учбовий рік. Відбірковий етап

Задачі для 8 класу

1. У п'ятизначному числі, що не містить нулів, стерли першу цифру, і воно зменшилося в цілу кількість разів. В отриманого числа знову стерли першу цифру, і воно знову зменшилося в цілу кількість разів. Потім першу цифру стирали ще двічі, і кожен раз число зменшувалося в цілу кількість разів. Наведіть приклад початкового числа.
2. Мешканці Країни Чудес діляться на хоббітів і вікінгів. Одного разу 27 мешканців сіли за круглий стіл так, щоб відстані між сусідами були однаковими. Виявилось, що між кожними двома хоббітами сиділи як мінімум два вікінги. Доведіть, що знайдуться три вікінги, що сидять на однакових відстанях один від одного.
3. Сто баранів біжать в ряд на відстані 6 метрів один від одного зі швидкістю 5 км/ч. Назустріч їм зі швидкістю 1 км/год йде пастух, який при зустрічі з бараном миттєво розгортає його в протилежному напрямку, і той продовжує бігти з попередньою швидкістю. Знайдіть відстань між баранами при їх зворотному русі.
4. Три колекціонери картин A , B і C виставили частину своїх картин на аукціон. A виставив 3% своїх картин, B — 7%, C — 20%. B купив усі картини, виставлені A , C — виставлені B , A — виставлені C . Яка найменша (ненульова) кількість картин могла бути виставлена на аукціон, якщо кількість картин у кожного колекціонера не змінилася?
5. На сторонах AB і BC квадрата $ABCD$ побудовано рівносторонні трикутники ABK і BCE , причому точка K лежить всередині квадрата, а точка E — поза ним. Доведіть, що K лежить на відріжку DE .
6. Чи можна розрізати квадрат на 144 однакові частини та скласти з них три квадрати, серед яких немає двох рівних?
7. У тенісному турнірі взяли участь N гравців, причому кожен із кожним зіграв по одному матчу, який закінчився перемогою одного з гравців. Для якого найменшого n у будь-якому такому турнірі знайдуться такі чотири гравці X , Y , Z і T , що X обіграв Y , Z і T ; Y обіграв Z і T ; Z обіграв T ?

• Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призери відбіркового етапу будуть запрошені на заключний етап, що проходить у січні – лютому 2019 року.

- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але також її повне обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). У виняткових випадках ми готові прийняти роботу в паперовому вигляді (поштою). Докладні інструкції по відправці розв'язків є на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід** (особисті дані вказуються окремо при завантаженні роботи на сайт).
- Роботи з ознаками списування чи колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2018–2019 учбовий рік. Відбірковий етап

Задачі для 9 класу

1. У п'ятизначному числі, що не містить нулів, стерли першу цифру, і воно зменшилося в цілу кількість разів. В отриманого числа знову стерли першу цифру, і воно знову зменшилося в цілу кількість разів. Потім першу цифру стирали ще двічі, і кожен раз число зменшувалося в цілу кількість разів. Наведіть приклад початкового числа.
2. Кирило придумав два квадратні тричлени, коренями яких є натуральні числа. Потім він склав їх і виявив, що коренями сумарного тричлена теж є натуральні числа. Чи можуть усі шість коренів виявитися різними?
3. Сто баранів біжать в ряд на відстані 6 метрів один від одного зі швидкістю 5 км/ч. Назустріч їм зі швидкістю 1 км/год йде пастух, який при зустрічі з бараном миттєво розгортає його в протилежному напрямку, і той продовжує бігти з попередньою швидкістю. Знайдіть відстань між баранами при їх зворотному русі.
4. На сторонах AB і BC квадрата $ABCD$ побудовано рівносторонні трикутники ABK і BCE , причому точка K лежить всередині квадрата, а точка E — поза ним. Доведіть, що K лежить на відрізку DE .
5. Назвемо популярністю цифри кількість чисел з набору $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$, які починаються з цієї цифри. Доведіть, що популярність якихось двох ненульових цифр відрізняється не менше, ніж у 5 разів.
6. Діагоналі опуклого чотирикутника перпендикулярні. Чи можуть його сторони виражатися чотирма послідовними цілими числами?
7. У тенісному турнірі взяли участь N гравців, причому кожен із кожним зіграв по одному матчу, який закінчився перемогою одного з гравців. Для якого найменшого n у будь-якому такому турнірі знайдуться такі чотири гравці X, Y, Z і T , що X обіграв Y, Z і T ; Y обіграв Z і T ; Z обіграв T ?

- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призери відбіркового етапу будуть запрошені на заключний етап, що проходить в січні – лютому 2019 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але також її повне обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). У виняткових випадках ми готові прийняти роботу в паперовому вигляді (поштою). Докладні інструкції по відправці розв'язків є на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід** (особисті дані вказуються окремо при завантаженні роботи на сайт).
- Роботи з ознаками списування чи колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2018–2019 учбовий рік. Відбірковий етап

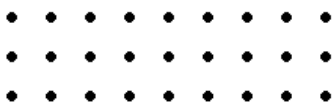
Задачі для 10 класу

1. Чи існують три різні квадратні тричлени, добуток будь-яких двох з яких ділиться на третій?
2. Числа від 1 до 49 розставлені в клітинах квадрата 7×7 так, що кількості непарних чисел у будь-яких двох рядках різні. Чи може виявитися, що кількості непарних чисел у будь-яких двох стовпцях теж різні?
3. Побудуйте множину точок на координатній площині, для яких вираз

$$(x^2 + y^2 - 4y + 3)^2 (3 - \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y - 3)^2})$$

приймає максимально можливе значення.

4. Назвемо популярністю цифри кількість чисел з набору $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$, які починаються з цієї цифри. Доведіть, що популярність якихось двох ненульових цифр відрізняється не менше, ніж у 5 разів.
5. Дано сітку $m \times n$ точок, причому загальна кількість точок ділиться на 3 (наприклад, на рисунку показано сітку 3×9). При будь m і n можна намалювати $\frac{mn}{3}$ трикутників із вершинами в цих точках так, щоб жодні два трикутники не мали спільних точок?



6. Бісектриси AK , BL , CM трикутника ABC перетинаються в точці I . Доведіть, що $\frac{IK}{A} + \frac{IL}{I} + \frac{IM}{IC} \geq \frac{3}{2}$.
7. Спочатку є сто чисел, рівних нулю. За один хід можна вибрати дев'ять чисел і зменшити одне з них на 1, друге на 2, третє на 3, ... восьме на 8, але зате дев'яте збільшити на 9. Яку найбільшу кількість чисел можна зробити додатними за допомогою таких операцій?

• Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призери відбіркового етапу будуть запрошені на заключний етап, що проходить у січні – лютому 2019 року.

• Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але також її повне обґрунтування.

• Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). У виняткових випадках ми готові прийняти роботу в паперовому вигляді (поштою). Докладні інструкції по відправці розв'язків є на сайті formulo.org.

• У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід** (особисті дані вказуються окремо при завантаженні роботи на сайт).

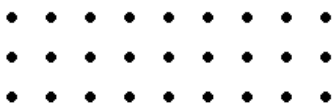
• Роботи з ознаками списування чи колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2018–2019 учбовий рік. Відбірковий етап

Задачі для 11 класу

1. Знайдіть два додатні числа, якщо квадрат першого з них в 16 разів більше куба другого, а квадрат другого числа вдвічі менше куба першого.
2. Числа від 1 до 49 розставлені в клітинах квадрата 7×7 так, що кількості непарних чисел у будь-яких двох рядках різні. Чи може виявитися, що кількості непарних чисел у будь-яких двох стовпцях теж різні?
3. Назвемо популярністю цифри кількість чисел з набору $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$, які починаються з цієї цифри. Доведіть, що популярність якихось двох ненульових цифр відрізняється не менше, ніж у 5 разів.
4. Дано сітку $m \times n$ точок, причому загальна кількість точок ділиться на 3 (наприклад, на рисунку показано сітку 3×9). При будь m і n можна намалювати $\frac{mn}{3}$ трикутників із вершинами в цих точках так, щоб жодні два трикутники не мали спільних точок?



5. Бісектриси AK , BL , CM трикутника ABC перетинаються в точці I . Доведіть, що $\frac{IK}{A} + \frac{IL}{I} + \frac{IM}{IC} \geq \frac{3}{2}$.
6. Спочатку є сто чисел, рівних нулю. За один хід можна вибрати дев'ять чисел і зменшити одне з них на 1, друге на 2, третє на 3, ... восьме на 8, але зате дев'яте збільшити на 9. Яку найбільшу кількість чисел можна зробити додатними за допомогою таких операцій?
7. Наведіть приклад багатогранника, проекції якого на три координатні площини — правильний трикутник, правильний чотирикутник і правильний шестикутник. Вкажіть координати кожної з вершин багатогранника, наведіть список його ребер і граней.

- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призери відбіркового етапу будуть запрошені на заключний етап, що проходить в січні – лютому 2019 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але також її повне обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). У виняткових випадках ми готові прийняти роботу в паперовому вигляді (поштою). Докладні інструкції по відправці розв'язків є на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід** (особисті дані вказуються окремо при завантаженні роботи на сайт).
- Роботи з ознаками списування чи колективної творчості розглядатися не будуть.