

№1.

Заметим, что в конце чисел встречается каждая из цифр A, B и C . Рассмотрим цифры, на которые могут оканчиваться квадраты чисел.

$$\begin{array}{lllll} 1^2 = \textcircled{1} & 3^2 = \textcircled{9} & 5^2 = 2\textcircled{5} & 7^2 = 4\textcircled{9} & 9^2 = 8\textcircled{1} \\ 2^2 = \textcircled{4} & 4^2 = \textcircled{6} & 6^2 = 3\textcircled{6} & 8^2 = \textcircled{4} & 0^2 = 0 \end{array}$$

Значит, квадраты чисел ~~то~~ могут оканчиваться только на $0, 1, 4, 5, 6, 9$.

При этом, если квадрат оканчивается на 5, то число обязательно делится и на 25, т.к. $5^2 = 25$. Значит, перед 5 должно стоять число, а такого быть не может, т.к. ~~ни~~ цифры 2 и 1 не могут стоять в конце квадратов. Значит, A, B или $C \neq 5$.

Если число оканчивается на 0, то оно делится на 10 $\Rightarrow$ квадрат должен делиться на 100, т.к. $10^2 = 100$ и ~~однако~~ 10 не является квадратом какого-либо целого числа. Т.к. 2 числа не идут подряд, A, B или $C \neq 0$.

Если какое-то из чисел оканчивается на 4 или 6, то оно четное $\Rightarrow$ его квадрат делится на 4, т.к. $2^2 = 4 \Rightarrow$ по признаку делимости, число из 2 последних цифр должно делиться на 4.

Из оставшихся 1, 4, 6, 9 можно составить:

$$64, 16, 36, 96.$$

При этом, если A, B или $C = 4$, то

$B \neq 4$, т.к. в таком случае, чтобы $\overline{AB}$ делилось на 64, $A = 6$, но тогда $\overline{BA} = 46$, а оно не делится на 4.

Значит, ~~4 и 6 не~~ Так же $A \neq 4$ по той же причине

Если $C = 4$, то $B = 6$, тогда

$\overline{A64}$, $\overline{46A}$ и $\overline{4A6}$ - квадраты.

Но ни 164, ни 964 квадратами не являются $\Rightarrow A, B$ или $C \neq 4$.

В таком случае, квадраты могут быть составлены только из 1, 6, 9. А это возможно, т.к. $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $31^2 = 961 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = 9, B = 6, C = 1$$

Ответ: существуют

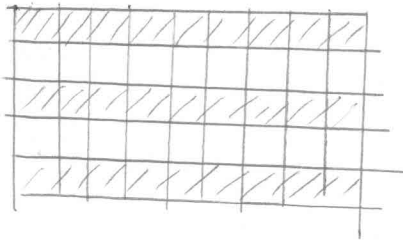
№2.

Всего на доске $100 \cdot 100 = 10000$ клеток.

Равновесными однозначно не могут быть клетки, которые граничат с нечетным количеством клеток, т.е. те, которые стоят по краям доски. С каждой стороны их 98: $(100 - 2 - (\text{крайние}))$.

$98 \cdot 4 = 392$ - клетки, граничащие с 3 клетками.

Угловые клетки могут быть равновесными, т.к. граничат с четным количеством - с двумя. Теперь рассмотрим, как можно раскрасить всю доску.



Доску можно красить рядами, т.е. чередовать ряд ~~черных~~ ^{синих} и ряд белых.

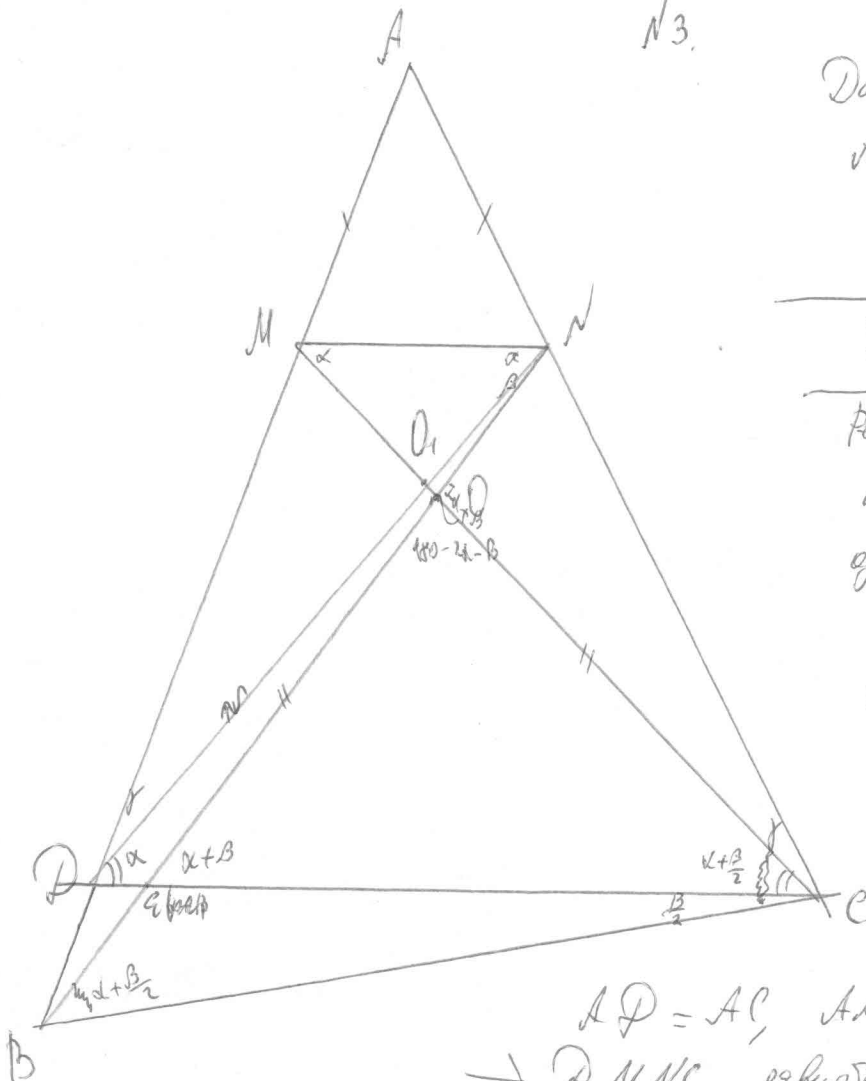
В таком случае все оставшиеся клетки - и граничащие с 4, и с 2 будут равновесными.

Значит, максимальное количество: $10000 - 392 =$

$= 9608$ клеток.

Ответ: 9608.

№3.



Дано: $\triangle ABC$

$AM = MN$

$CM \cap BN$ в т. O

$BO = CO$

Доказать: $\triangle ABC$ - р/б.

Решение: Допустим, что $\triangle ABC$ не равнобедренный, и взяв у сторон, например, $AB > AC$.

Отложим на стороне AB точку P, такую что $AP = AC$

$AP = AC$

$DM = AP - AM$

$NC = AC - AN$

$AP = AC, AM = AN \Rightarrow MP = NC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MNC$ - равнобедренный треугольник.

(т.к. $\triangle AMN$ и $\triangle ACP$ подобны $\Rightarrow MN \parallel CP$)

DN перпендикулярен CM в точке O .

Рассмотрим $\triangle DMC$ и $\triangle DNE$.

В равнобедренной трапеции диагонали равны $\Rightarrow DN = MC$.

DC - основание, боковые стороны в трапециях

$DM = NE$ (т.к. трапеция равнобедренная) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DMC = \triangle DNE$ по 3 сторонам. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ соответствующие элементы треугольников равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDN = \angle MCF$.

Тогда $\triangle DO_1C$ - равнобедренный $\Rightarrow CO_1 = DO_1$.

По условию $\triangle BOC$ так же равнобедренный.

Обозначим $\angle DNM$ за α , $\angle ONO_1 = \beta$, $\angle NCM = \gamma$

$$\angle BOC = 180 - 2\alpha - \beta$$

$$\text{Тогда } \angle OBC = \angle OCB = \frac{180 - (180 - 2\alpha - \beta)}{2} = \frac{2\alpha + \beta}{2} = \alpha + 0,5\beta$$

$$\angle DCB = \frac{\beta}{2}$$

$$\angle CED = 180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$$

$$\angle CEO = 180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$$

$$\angle MC = 2\alpha + \beta$$

Р-м $\triangle ENE$

$$\angle ENC = 180 - (\alpha + \beta + \alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma) = 180 - (2\alpha + \gamma + 1,5\beta) = 180 - 2\alpha - 1,5\beta - \gamma$$

Р-м $\triangle MNE$

$$\alpha + \alpha + \beta + \gamma + (180 - 2\alpha - 1,5\beta - \gamma) = 180$$

$$2\alpha + \beta + \gamma + 180 - 2\alpha - 1,5\beta - \gamma = 180$$

Приведем подобные слагаемые, получим

$$-0,5\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

В таком случае $\alpha = \alpha + \beta \Rightarrow \angle NDC = \angle NEC = \alpha$

Р-м $\triangle BDE$

$$\angle BED = \alpha + \beta = \alpha \quad (\text{как смежные})$$

$$\angle BDE = 180 - \alpha, \text{ как смежные}$$

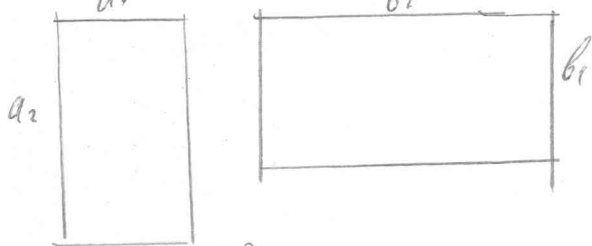
$$\alpha + 180 - \alpha + \angle DBE = 180 \Rightarrow \angle DBE = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка B совпала с точкой $D \Rightarrow AB = AD \Rightarrow AB = AC$ т.к. $AD = AC$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный

№4.

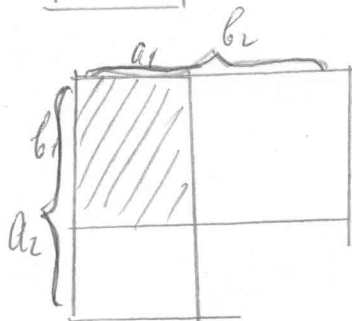
Рассмотрим, как найти общую часть прямоугольников



Пусть есть 2 прямоугольника:

$$a_1 \times a_2 \text{ и } b_1 \times b_2$$

$$a_2 > a_1, \quad b_2 > b_1$$



Тогда при их наложении друг на друга получится, что общая часть равна произведению их меньших сторон, т.е. $a_1 \times b_1$

Площадь остальных двух прямоугольников равна $a_1(a_2 - b_1)$ и $b_1(b_2 - a_1)$

Тогда, чтобы площадь общей части была наибольшей, нужно чтобы $a_2 - b_1$ и $b_2 - a_1$ были с наименьшей разницей.

Т.к. $a_2 > a_1$ и $b_2 > b_1$, то пусть

a_1 - вертикальная, a_2 - горизонтальная стороны первого

b_1 - горизонтальная, b_2 - вертикальные стороны второго.

Т.к. прямоугольники обведены по клеткам, их площадь не может быть нецелым числом. Разложим возможное площадь на простые множители.

$$2011 = 2011 \cdot 1$$

$$2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503$$

$$2013 = 3 \cdot 671$$

$$2014 = 2 \cdot 1007$$

$$2015 = 5 \cdot 403$$

$$2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$2017 = 1 \cdot 2017$$

$$2018 = 2 \cdot 1009$$

$$2019 = 673 \cdot 3$$

В числе 2016 наибольшее число простых множителей $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ из них можно составить 2 числа с наименьшей разницей.

В идеале, нам нужны 2 квадрата, при наложении одного на другой и должно получиться 2016. Но $\sqrt{2016} \approx 44,9$

Поэтому длина или ширина одного будет больше другого из измерений.

Найдем число, максимально приближенное к 44,9, такое, что $a_1 \times b_1 = 2016$.

Такие числа - 42 и 48. (Т.к. 43 - простое, 44 = 4 · 11, 45 = 5 · 9, 46 = 23 · 2, 47 - простое, а множителями 43, 11, 5, 23 или 47 в 2016 нет. $42 \cdot 48 = 2016$. Значит, длина одного - 42, а другого - 48. Соответственно, ширина первого - 48, второго - 42.



Тогда, общая площадь равна

$$42^2 = 1764.$$

Ответ: 1764.

№5.

Всего участвует 3 разные цифры $\Rightarrow$ ~~ка~~
 $\Rightarrow$ цифру в каждом разряде можно выбрать 3 различными способами. Тогда всего можно составить:

$$\begin{array}{c} \overline{abcd} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81 \text{ - разное чисел.}$$

Способов выбрать 3 из них:

$$\frac{81 \cdot 80 \cdot 79}{3 \cdot 2} = 27 \cdot 40 \cdot 79 = 85320 \text{ способов.}$$

Рассчитаем, сколько групп чисел не образуют сет и отнимем их количество от общего.

Сет не образуют числа в разрядах:

1,1,2
1,1,3
2,2,1
2,2,3
3,3,1
3,3,2.

Т.к. перестановка чисел не приводит к образованию нового сета, то есть 6 вариантов чисел в одних разрядах, не образующих сет.

Когда сет не образуется из-за одного разряда, есть

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ - варианты, нужно поставить эти числа}$$

↓
групп чисел разряд.

Остальное число можно выбрать каждым 3 способами, т.е. всего

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 24 = 27 \cdot 24 = 648 \text{ вариантов.}$$

Когда сет не образуется из-за 2 разрядов:

$6 \cdot 6^2 = 216$ - способ выбора
 $\downarrow$
 способ выбора
 группа чисел
 всего в 2 разряда
 2 разряда

$$216 \cdot 3^2 = 1944 - \text{варианта}$$

$\downarrow$
 оставшиеся числа

Когда 3 разряда:

$$4 \cdot 6^3 \cdot 3 = 2592 - \text{варианта}$$

$\downarrow$
 способ выбора
 группа чисел
 оставшиеся разряды

Когда 4 разряда

$$6^4 = 1296 - \text{варианта}$$

$6^2 = 36$
 $6^2 = 36$
 При этом еще 16 вариантов, когда числа в 4 разрядах повторяются,

как, например,

 1111

 1111

 2323

$6^3 + 6^2 + 6 = 216 + 36 + 6 = 258$ вариантов, когда в варианте с 1 разрядом совпадают 2, 3 или 4.

$$6^2 + 6^1 = 36 + 6 = 42 - \text{варианта, когда совпадают 2 с 3 или 4}$$

6 - когда совпадают 3 с 4.

Тогда всего 4 группы чисел, не образующих сет:

$$648 + 216 + 1944 + 2592 + 1296 - 36 - 258 - 42 - 6 =$$

$$= 6480 - 342 = \underline{6138}$$

Значит, сетов в игре:

$$85320 - 6138 = 79182.$$

Ответ: 79182 сетов