

N1

$$(k/2)! \cdot (k/4) = 2016 + k^2$$

Так как $n!$ определен только для целых неотрицательных чисел, то k - четное целое неотрицательное число. Значит, $k/2 = l$, где l - целое неотрицательное число.

Тогда $k = 2l$ и уравнение примет вид:

$$(l)! \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = 2016 + 4l^2$$

$$(l)! \cdot l = 4032 + 8l^2 \quad (1)$$

Теперь заметим, что при $l \leq 6$

$$l! \cdot l \leq 6! \cdot 6 = 720 < 4032. \text{ Значит,}$$

при $l \leq 6$ уравнение решений не имеет.

Теперь рассмотрим случай,

когда $l \geq 7$. Рассмотрим две ситуации:

$$1) \ l \geq 7, \ l \not\equiv 7$$

Тогда $(l)! \cdot l \not\equiv 7$, т.к. $l \geq 7$ и $4032 \equiv 7$,

но $8l^2 \equiv 7$, т.к. $l \not\equiv 7$. Значит, полу-

или противоречие. Значит, в этом случае уравнение (1) корней не имеет.

$$2) \quad l \geq 7, \quad l : 7$$

Тогда, $(l)! \cdot l : 49$, м.к. $l! \geq 7 \cdot l : 7$
 $4032 : 49$

$$8l^2 : 49, \text{ м.к. } l : 7$$

Значит, получаем противоречие.

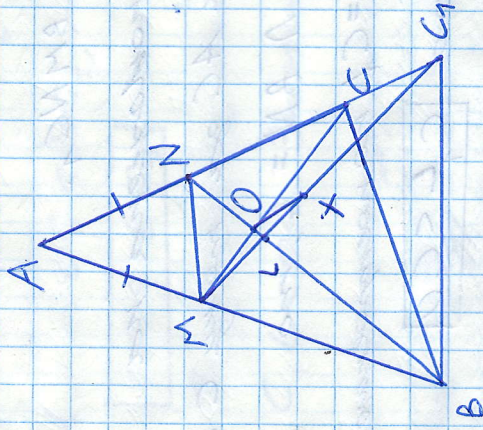
Тогда, в этом случае уравнение (1) не имеет корней.

Таким образом, рассмотрев все случаи, мы получили, что уравнение $(k/2)! \cdot (k/4) = 2016 + k^2$ не имеет корней.

Ответ: не существует таких чисел k , что $(k/2)! \cdot (k/4) = 2016 + k^2$.

N2

Решение:



Дано:

$$AM = AN$$

$$BO = CO$$

Доказать:

$\triangle ABC$ -
 равнобедренный

1) Докажем, что $\triangle ABC$ - равнобедренный, то есть $AB \neq AC$. Тогда,

высоте (главы ортогональности) $AB > AC$.

Тогда отложим на продолжении стороны AC за точку C отрезок CA_1 , то

получим, что $AC_1 = AB$. Тогда $\triangle AC_1B$ -

равнобедренный. А м.к. $\triangle MAN$ и $\triangle BAC_1$ -

равнобедренные ($AM = AN$ и $AB = AC_1$), то

$MN \parallel BC_1$ и $\angle ABC_1 = \angle AC_1B$. Значит,

$BMNC_1$ - равнобедренная трапеция, в

Разобрав числа, которые имеют
быть цифрами в числе, получе-
вывивается луги на паре:

1-8

2-7

4-5

Заметим, что сумма цифр в каждой
из пар равна 9. Теперь обозначим
два наименьших числа в "пару"

если сумма цифр, стоящих в разря-
дах единиц, равна 9, сумма цифр, стоя-
щих в разрядах десятков, равна 9, ...
Каждый раз пара обозначена

числа 12457 и 87542, 72881 и

57118. Легко заметить, что

каждое из 6⁵ чисел, получившихся
луги можно обозначить с

кажд¹⁰-то другим получившимся
числом в паре единственным
образом.

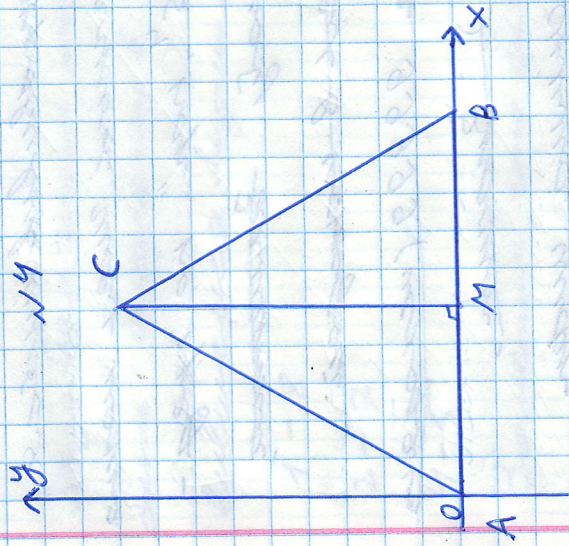
Значит, все 6⁵ получившихся
луги наименьших чисел можно
разбить на 3·6⁴ "пар" по пред-
ложенному способу. Заметим,
что ~~сумма чисел в каждой~~

~~такой паре равна 99999 (исходя из~~
~~способа разбиения)~~ Значит,

Заметим, что сумма цифр
(одна) у всех чисел в каждой
"паре" (исходя из способа разбиения)
равна 9·5 = 45. Тогда, одна

сумма цифр у всех наименьших
чисел, которые являются луги,
равна 6⁴ · 3 · 45 = 3⁴ · 2⁴ · 3 · 3² · 5 =
= 2⁴ · 3⁷ · 5 = 174960.

Ответ: 174960 - одна сумма
цифр всех наименьших чисел,
которые являются луги.



Дано:

$$AB = 2016$$

$$BC = AC = 1533$$

Найти:

координаты вершин

лежащих внутри-
границе $\triangle ABC$ (вклю-
чая углы равно-
правия)

Решение:

1) Пусть M - середина отрезка AB .

Тогда $AM = BM = 1008$ и $CM \perp AB$, т.к.

$\triangle ABC$ - равнобедренный. Тогда $CM =$

$$= \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{1533^2 - 1008^2} = 1155 \text{ по}$$

теореме Пифагора в $\triangle ACM$.

2) Теперь зададим систему координат xOy

координат, начало отсчета

координат поместим в точку A и

оси Ox направим вдоль AB и ось

Oy направим перпендикулярно CM .

Тогда найдем координаты точек A ,

B, C, M :

$$A(0;0) \quad B(2016;0) \quad C(1008;1155)$$

$$M(1008;0)$$

Теперь запишем уравнения прямых,

соединяющих AC, CB и AB соответственно:

$$AC: y = \frac{1155}{1008}x \Rightarrow y = \frac{55}{48}x$$

$$BC: y = -\frac{1155}{1008}x + 2310 \Rightarrow y = -\frac{55}{48}x + 2310$$

$$AB: y = 0$$

Тогда сам (x, y) - координаты

узла, лежащего внутри или на границе

$\triangle ABC$, но условием x и y должны

быть целыми числами:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq \frac{55}{48}x \\ y \leq -\frac{55}{48}x + 2310 \end{cases}$$

Теперь найдем количество целочисленных решений этой системы.

которые будут равно количеству
узлов в сумме чисел на сторонах $\triangle ABC$.

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq \frac{55}{48}x \\ y \leq \frac{55}{48}x + 2310 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq \frac{55}{48}x \\ y \geq \frac{55}{48}x - 2310 \end{cases}$$

Потому найдем количество узлов
лежащих на отрезке AC:

AC: $y = \frac{55}{48}x$

Так как C имеет координаты
(1008; 1155), то количество узлов
лежащих на отрезке AC равно
количество неотрицательных
целых чисел кроме 0 не превосходящих 1008.

Таким числом равно 22 (т.к. $1008 = 48 \cdot 21$
и координаты узла - целые числа).

C помощью аналогичных рассужде-
ний найдем, что на отрезке
CB тоже лежит 22 узла.

А на отрезке AB, очевидно, лежит
то же самое количество ч.ч.

2017 узлов. Тогда на сторонах

$\triangle ABC$ в сумме лежит $x = 22 + 22 + 2017 =$
 $= 2058$ узлов (т.к. узлы в вершинах

A, B, C были подсчитаны дважды).

$$S_{ABC} = \frac{CM \cdot AB}{2} = \frac{1155 \cdot 2016}{2} = 1155 \cdot 1008 \text{, где}$$

S_{ABC} - площадь $\triangle ABC$.

По формуле Пика $S_{ABC} = C + \frac{x}{2} - 1$, где

C - количество узлов лежащих внут-
ри $\triangle ABC$, x - количество узлов лежащих
на границе $\triangle ABC$. Значит, $C = S_{ABC} + 1 - \frac{x}{2} =$
 $= 1155 \cdot 1008 + 1 - \frac{2058}{2} = 1163212$.

Тогда в треугольнике ABC лежит
 $1163212 + 2058 = 1165270$ узлов

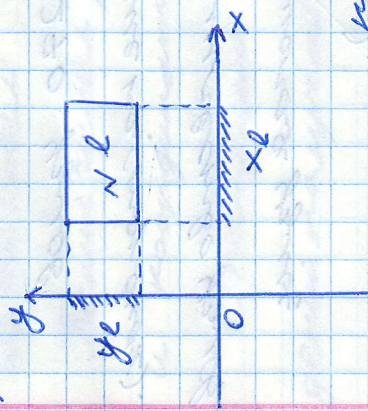
(включая узлы, лежащие на сторонах).

Ответ: 1165270 - количество узлов
лежащих в $\triangle ABC$ (включая узлы,
лежащие на сторонах).

№ 5

Введем систему координат.
оси Ox и Oy которой направлены
соответствующими сторонами
трапеции.

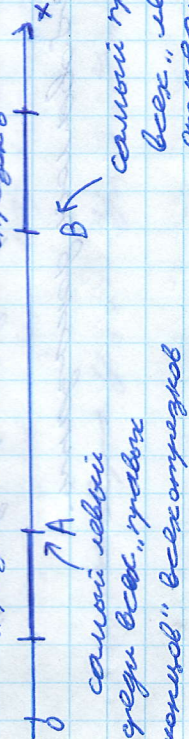
Теперь спроецируем стороны
каждого из участвующих на
соответствующие оси и получим
отрезки, лежащие на осях Ox и
 Oy при таких проектированиях,
 x_0 и y_0 , где l - наиб. длина -
трапеции, стороны которого мы принимаем
равными.



Аналогично проделаем
то же на соответствующей
оси стороны каждого
из участвующих
многоугольников и отрезки
 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ и $y_1, y_2, \dots, y_{100}$ на осях
 Ox и Oy соответственно.

Теперь рассмотрим отрезки $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ на оси Ox и докажем, что
среди них найдутся 70 различных
отрезков, каждый из которых
пересекается со всеми остальными.

Так как, по условию, каждый из уча-
ствующих пересекается хотя бы с
90 другими, то и каждый из отрезков
 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ пересекается хотя бы
с 90 другими отрезками. Выберем
среди отрезков $x_1, \dots, x_{100}$ на оси Ox
отрезки с самыми левыми средами
всех "правых концов" отрезков и с
самыми правыми средами всех "левых
концов" отрезков (если таких отрезков
несколько, то выберем
один из них).



Тогда каждый из отрезков

Тогда, из построения, не существует отрезка, оба конца которого лежат левее A или правее B .

Значит, если существует отрезок, который пересекает отрезок a и отрезок b , то этот отрезок пересекает все отрезки $x_1, \dots, x_{100}$.

Укажем из вышеупомянутого, отрезок a пересекает хотя бы 90 среди других отрезков и отрезок b пересекает хотя бы 90 среди других отрезков.

Значит, отрезки a и b одновременно пересекает хотя бы 70 отрезков, $m.k$ всего их все 100 отрезков. Но тогда хотя бы 70 отрезков

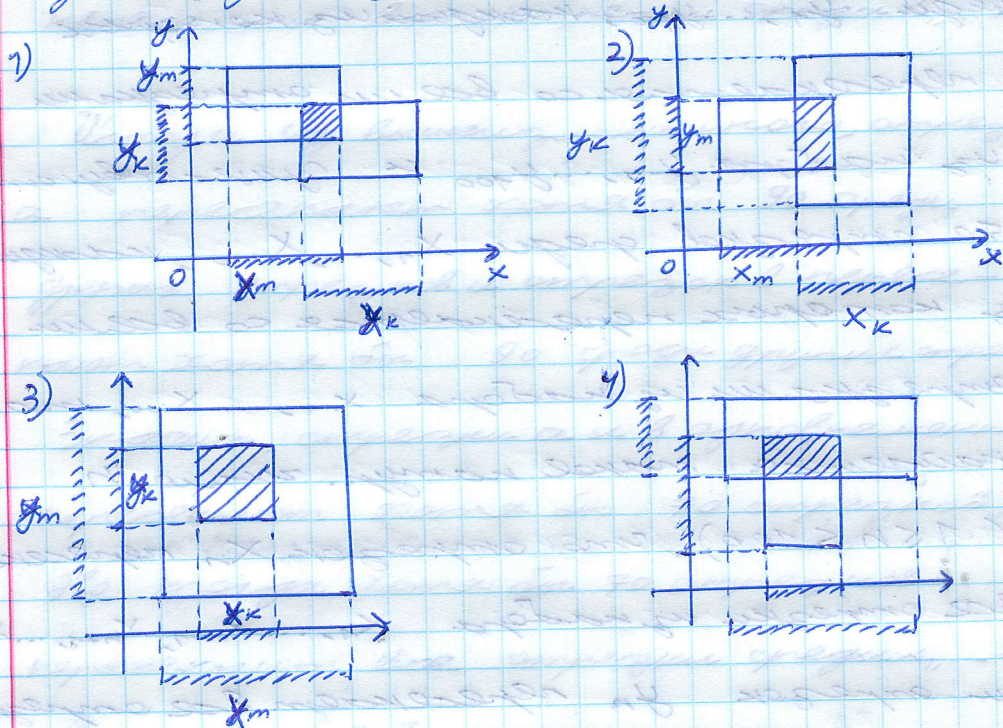
пересекает все отрезки $x_1, \dots, x_{100}$. Это и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что среди отрезков $y_1, y_2, \dots, y_{100}$ на оси Oy найдется 70 различных отрезков, каждый из которых пересекает все остальные отрезки $y_1, \dots, y_{100}$.

Но $m.k$ существует 70 отрезков среди $y_1, \dots, y_{100}$, каждый из которых пересекается со всеми отрезками из набора $y_1, \dots, y_{100}$ и существует 70 отрезков среди $x_1, \dots, x_{100}$, каждый из которых пересекается со всеми отрезками из набора $x_1, \dots, x_{100}$, то найдется такое натур. число n ($1 \leq n \leq 100$), что отрезок x_n пересекает все отрезки из набора $x_1, \dots, x_{100}$, $x_{n+1}, \dots, x_{100}$ и отрезок y_n пересекает все отрезки из набора $y_1, \dots, y_{n-1}, y_{n+1}, \dots, y_{100}$.

В заключение сформулируем следующий факт: если отрезки y_k и y_m пересекаются и отрезки x_k и x_m пересекаются, то прямоугольники N_k и N_m пересекаются.

Графически изображим несколько случаев, доказывающих это утверждение:



Тогда, исходя из вышесказанного, получаем, что прямоугольник N_n пересекается со всеми прямоугольниками (т.к. y_n пересекается с $y_1, \dots, y_{100}$ и x_n пересекается с $x_1, \dots, x_{100}$).