Задача №2

$2^n + n^{2016} = p$, где $n \in N$, p - простое число.

Проверим для $n = 1$: $2^1 + 1^{2016} = 2 + 1 = 3$ (3 - число простое) - удовл.

$n = 2$: $2^2 + 2^{2016} = 2^2 \cdot (1 + 2^{2014})$ - это число делится на 2^2 и на $(1 + 2^{2014})$, т.е. оно уже не простое, что тоже не удовлетворяет условию.

I) Предположим, что n - четное число, но единственное простое четное число это 2. Мы уже проверили ранее, что это не подходит.

Это значит, что для любого четного числа n не найдется простого числа, которое можно представить в виде $2^n + n^{2016}$

II) Предположим, что n - нечетное число, т.е $n = 2m+1$

Наименьшее нечетное простое число, это число 3. Будем проверять остатки от деления на 3. Всего может получиться 3 возможных остатка (0 - число $\vdots$ 3, остаток 1 и остаток 2)

Рассмотрим каждый остаток по очереди, по отдельности

① Остаток равен 2, т.е. $n \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$

По свойствам делимости: $n^{2016} \equiv (-1)^{2016} \equiv 1 \pmod 3$

$2 \equiv -1 \pmod 3$

Тогда: $2^n \equiv -1 \pmod 3$, потому что n - нечетное.

$2^n + n^{2016} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Мы получили, что число дает остаток 0 при делении на 3. Это не удовлетворяет условию.

② Остаток равен 1, т.е. $n \equiv 1 \pmod 3$

По свойствам делимости: $n^{2016} \equiv 1^{2016} \equiv 1 \pmod 3$

$2 \equiv 2 \pmod 3 \equiv -1 \pmod 3$

$2^n \equiv -1^n \pmod 3 \equiv -1 \pmod 3$, потому что n - нечетное.

Тогда: $2^n + n^{2016} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, т.е. мы получаем ①