№ 1

Представим 1000, ~~как~~ в виде его простых множителей: $1000 = 2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5 = 2^3\cdot5^3$. Значит нам достаточно выбрать 5 делителей числа 1000 так, чтобы они в произведение давали 1000 и при этом были различны. Тогда каждый из делителей должен содержать в себе различные степени чисел 2 и 5. Если будет ~~на~~ делитель, содержащий в себе 3-ю степень 2-х или 5-ти, то тогда оставшиеся 4 числа выбрать нельзя, т.к. даже если ~~степень~~ степень ~~в~~ II-го из чисел (2 или 5) 0-вая в числе с III-ей степенью, то оставшиеся 4 числа по первому числу (2 или 5) имеют все нулевую степень, а по второму (2 или 5) в сумме 3. Но так распределить степени нельзя, т.к. она у всех различна, то это как минимум степени от 0 до 3, но в сумме они дают 6. Значит среди 5 чисел, нет числа кратного 8-ми (2^3) или 125-ти (5^3).

Так же если среди 5-ти чисел 3 имеют одинаковую степень числа (5 или 2), то тогда ~~другого~~ степени другого числа распределяются в них от 0 до 2 (в сумме 3), но тогда 2 оставшихся числа оба ~~не~~ имеют ~~сте~~ нулевые степени чисел 2 и 5. Но тогда они равны. Что запрещено. Значит среди 5 чисел нет 3-х кратных 2-м или 3-х кратным 5.

Тогда среди 5-ти чисел ~~...~~ нулевую степень каждого из чисел 2 и 5 имеют 3 числа, I-ю — 1 число, II-ю — 1 число.

Тогда сумма степеней каждого из чисел ~~2~~ 2 и 5 среди 5-ти чисел не больше

2-х, иначе будут два числа с нулевыми степенями 2 и 5. Так же не будет числа :10 (т.е. и 2, и 5), т.к. тогда опять же будут два числа с нулевыми степенями чисел 2 и 5. Тогда пример строится так: I-е число имеет II-ю степень первого числа и нулевую второго; V-е число — I-ю степень первого числа и нулевую второго; III-е число имеет обе нулевые степени; IV-е число 0-ую I-го и I-ю второго; II-е число 0-ую I-го и II-ю второго.
Не умоляя общности первым числом будет 5, вторым 2. Тогда числа: 25, 5, 1, 2, 4. Они все натуральные и различны, а $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25 = 1000$
Ответ: 1, 2, 4, 5 и 25

№2

S общей части будет считаться, как произведение вертикальной стороны I-го прямоугольника на горизонтальную сторону второго, т.к. $S_{пер.}$ двух прямоугольников на линиях сетки — прямоугольник, а $S_{пер.}$ ~~имеет~~ таких прямоугольников является произведением меньших сторон (т.к. у I-го не пересекающиеся части слева и справа от пря-ника пересечения, а у II-го — снизу и сверху). Тогда чтобы $S_{пер.}$ была наибольшей, надо чтобы вертикаль I-го и горизонталь II-го были максимально большими, но т.к. $в._I < г._I$, а $г._{II} < в._{II}$, то они должны быть близки к $г._I$ (горизонталь I-го прям.) и к $в._{II}$ (вертикаль II-го прям.) соответственно.
В I-м пря-ке наибольшее значение вертикали — 31 (тогда гор. = 65),

т.к. 2015 = 5 · 13 · 31, и гор.$_I$ > вер.$_I$,
то ближайшее к гор.$_I$ значение
вер.$_I$ это 31, т.к. вер.$_I$ может содер-
жать только ~~в~~ 1 простой делитель (даже
если их хотя бы 2, то вер.$_I$ будет > гор.$_I$)

В пря-ке II наибольшее значение
горизонтали — 42 (тогда вертикаль =
= 48). При любых других значениях
гор.$_{II}$ она больше вер.$_{II}$.

Тогда $S_{пер.}$ = 31 · 42 = 1304 (кл.)
Тогда наибольшая $S_{пер.}$ = 1304 кл.
Ответ: 1304 клетки

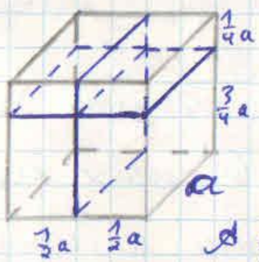
№3

Понятно, что разрезать на 1 ~~не~~ ти-
пичный пря-ный пара-пед куб нельзя (это ос-
тается сам куб). Если разрезать
куб на 2 пара-педа, то одна из
3-х сторон куба разрежется на
2 части, а две оставшиеся целыми.
Они тоже и будут равны. Значит

~~раз~~
разрезать куб на 2 типичных пря-ных пара-педа нель-
зя.

Если разрезать куб на 3 пря-ных пара-педа,
то мы как бы сначала режем его
на два, а потом один из них ещё
раз на два. Но тогда тот пря-ный пара-пед,
который II-й раз не разрезали
будет иметь два равных измерения,
т.к. у него резали только 1 изме-
рение (измерение — длина, ширина и
высота). Тогда он не типичный, зна-
чит разрезать куб на 3 ~~не~~ типич-
ных пря-ных пара-педа нельзя.

А вот на 4 можно. Пример:



Здесь 2 прям. пара-педа име-
ют размеры $a \times \frac{1}{2} a \times \frac{1}{4} a$ (где a — сторона куба),
А два других $a \times \frac{1}{2} a \times \frac{3}{4} a$.

Ответ: на 4 типичных прямоугольных параллелепипеда.

№5 (первое решение)

Заметим, что с каждой из сторон доски есть по 98 клеток, которые имеют по 3 соседних клетки. Они равновесными быть точно не могут, т.к. все клетки покрашены в один из двух цветов и тогда у них либо все три соседа одного цвета, либо 2 одного и 1 другого, но в любом случае не поровну. Тогда n точно не превышает $100 \cdot 100 - 98 \cdot 4 = 9608$. Но так же на доске может быть и 0 равновесных клеток, если доску покрасить в шахматном порядке, или вообще не красить одним из цветов.

Значит на доске может быть от 0 до 9608 равновесных клеток. Осталось привести алгоритм получения любого числа равновесных клеток.

~~Возьмём доску 100×100. Покрасим весь самый левый столбец, кроме, в синий, а остальные в белый. Это будет база I. Получим Теперь из базы I уберём 99 нижнюю клетку самого левого столбца и перекрасим её в белый. Это база II~~

~~Теперь получим 1: возьмём базу II~~

~~Возьмём доску 100×100. Покрасим весь самый левый столбец в синий, кроме 2-й и 98-й клеток столбца, это — база I. Теперь закрасим оставшиеся поля в белый цвет. После возьмём базу I перекрасим в белый синий цвет 2-ю клетку. Это — база II.~~ Теперь покажем, как получать числа. Получим 0: база I.

~~Получим 2: база I (0) и покраска 2-й и 98-й клеток самого левого стол-бца.~~

~~Получим 3: покраска для 0, только ещё покрашена~~

Теперь получим 2: база II и покраска 98-й клетки самого левого столбца

Теперь получим 3: покраска для 1 и покраска 1-й и 2-й клетки ~~з~~ 3-его слева столбца.

Получим 4: покраска для 2 и покраска 1-й и 2-й клетки 3-его слева столбца.

Таким образом любое число можно получить, добавляя в следующий слева ряд по клетке снизу к раскраске ~~числа~~

Покажем этот ~~же~~ алгоритм с помощью математической индукции. Сначала покажем базу — 0. Для этого сделаем базовую картинку. Покрасим в синий весь левый столбец, кроме 2-й и 98-й клетки, а так же во всех остальных нечётных, кроме 99-го, слева столбцах 1-е и 100-е клетки. А всё остальное покрасим в белый. Тогда на доске 0 равновесных клеток. База доказана.

Пусть на доске k равновесных клеток. Докажем для k+1 равновесных клеток. Алгоритм:

~~Есть ли под последней снизу покрашенной клеткой синяя, если нет, то красим её в синий. Если да, то сдвигаемся на~~

Если
Номер столбца больше 50, то перекрашиваем ~~[illegible]~~ 99-ю сверху клетку в противоположный цвет (из синего в белый, из белого в синий). Так
уже под последней покрашенной клеткой есть белая, то красим эту белую клетку в синий, иначе сдвигаемся на два столбца ~~вверх~~ вправо в самый верх, ~~[illegible]~~ и красим ~~в~~ в синий первую сверху не белую клетку в синий. Если сдвинуться вправо нельзя, то мы добились нужного.

Если номер столбца меньше 50, то перекрашиваем в противоположный цвет 100-ю клетку 99-го слева столбца, а остальные аналогично с тем случаем, когда номер столбца больше 50.

Таким образом мы привели пример алгоритма, для $k+1$ равно-

весных клеток. Переход доказан.

Таким образом мы добились того, что можем получить любое число равновесных клеток от 0 до 9608, или и может быть n.

Ответ: для любых n от 0 до 9608.

№4

В числах, которые нравятся Лидии, нет цифр ~~от~~ 0, 3, 6, 9. В них есть только 6 цифр: 1, 2, 4, 5, 7 и 8. Тогда всего у Лидии $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$ нравящихся ей чисел. Сопоставим каждой цифре пару: 1 и 8, 2 и 7, 4 и 5. Тогда каждому из 7776 чисел в пару можно поставить число с „обратными" цифрами: так для 18845 поставим в пару 81154 ($1 \to 8$, $8 \to 1$, $4 \to 5$, $5 \to 4$).

Заметим, что сумма ~~цифр~~ сумм цифр пары равна 45, т.к. сумма двух обратных чисел равна 9 (9 = 1+8 = 4+5 = 2+7), а всего в каждом числе по 5 цифр. Тогда каждому числу мы сопоставим пару. Всего чисел 7776, а значит пар в 2 раза меньше: 7776 : 2 = 3888. Но сумма сумм цифр в каждой паре равна 45. Значит сумма всех цифр, чисел, которые нравятся Лидии равно: 3888 · 45 = 174960.

Ответ: общая сумма равна 174960.

№5 (второе решение)

Заметим, что по краям доски есть 392 (98 · 4 = 392) клетки, у которых по 3 соседа. Они точно не равновесные, т.к. у них нечётное число соседей. Но тогда равновесных клеток на доске не более ~~[illegible]~~ 100 · 100 − 392 = 9608 клеток. Но их так же может быть и 0 (допустим, когда доска вся синяя). Значит нам нужно показать, как получить любое число равновесных клеток от 0 до 9608.

Сделаем базовую раскраску: Она шахматная, где самая левая, самая верхняя угловая клетка синяя.

~~Же~~ Сейчас на доске 0 равновесных клеток. Теперь берём самую правую клетку 2-й сверху строки и перекрашиваем её в цвет слева стоящей клетки, а слева стоящую от неё в цвет взятой клетки. Так можно поступить со всей 2-й сверху строкой, получая равновесные клетки от 0 до

99 (98 получается, как 99, но меняются цветами I-я и II-я справа клетки доски). Так же можно делать и с 99-й сверху строкой. Но если мы ~~двигали~~ меняли клетки с 3-й до 98-й строк, то за замену одной строки получаем 198 равновесных клеток. Это тоже самое, что и замена всех клеток в 2-й и 98-й строках. Тогда вернём их и поменяли цвета в 3-й строке. Тогда теперь снова доберём до 198 в 2-й и 98-й. Теперь мы получаем числа от 198 до 396. Так, повторяя действия, получим числа до 9608.

Значит все числа от 0 до 9608 мы получить можем.

Ответ: для n от 0 до 9608.