№ 1.

Одинаков

Т.к. факториал определен только для целых и неотрицательных чисел, $k \vdots 2 \Rightarrow k = 2x$, где $x \in \mathbb{Z} \geq 0$. Тогда можно переписать это так:

$$x! \cdot \frac{x}{2} = 2016 + 4x^2$$

$$x! \cdot x = 4032 + 8x^2$$

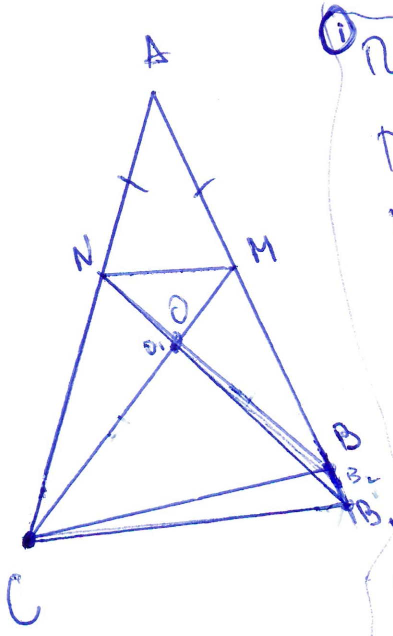
$$x^2((x-1)! - 8) = 4032$$

Заметим, что функция слева монотонно возрастает $\Rightarrow$ у этого уравнения 1 решение.

Решение: $x = 6$. Док-во: $36(5! - 8) = 36 \cdot (120 - 8) = 36 \cdot 112 =$
$= 4032 \Rightarrow k = 12$

~~Отв~~ Ответ: $k = 12$

№ 2.



① Пусть $AC \neq AB$. Без ограничения общности $AC > AB$.

Проведем через C прямую параллельную NM до пересеч. с AB в т. B_1. Обозначим с O_1 точку пересеч. NB_1 с CM. Т.к. $AC > AB$, т. B_1 лежит за т. B на ~~прямой~~ луче $AB \Rightarrow$
$\angle CNB_1 < \angle CNB \Rightarrow O_1 \in$ отрезок CO
$\Rightarrow CO_1 < CO$

Т.к. $\triangle AB_1C$ ~ $\triangle AMN$ — равнобедр., $NC = MB_1$ и $NM \parallel CB_1 \Rightarrow CNMB_1$ — равнобедр. трапеция
$\Rightarrow CO_1 = O_1B_1$ (равнобедр. трапеция симметрична отн. прямой соедин. середины оснований (эта прямая содержит O_1, т.к. $NMO_1 \sim B_1CO_1$, и они равнобедр., и углы при O равны (вертикальные), а медианы — это биссектрисы в равнобедр. треуг.)

~~Проведем прямую, пер. NB_1 через O_1 до пересеч. с BB_1~~

② Сгомотетим $\triangle B_1NB$ с центром в т. B и коэф. $\frac{O_1B_1}{NB_1}$. N перейдет в O_1, B_1 в B_1, B в B_2.

$O_1B_2 < O_1B_1$, т.к. $\angle O_1B_2B_1$ — тупой, т.к. равен $\angle NBB_1 = \angle MNB + \angle NMB$, а $\angle NMB$ — тупой, т.к. равен $180 - \angle\angle NMA$. *

③ Из всего этого получим:

$$\begin{array}{ccc} CO_1 & < & CO \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ O_1B_1 & & OB \end{array}$$

$O_1B_1 < OB$, но $OB < O_1B_1$, поэтому всему противоречие.

Стр 1

* $\angle NMH < 90$, т.к. он угол при основании равнобедр. Одинцов.
т.к. $O_1B_2 \parallel OB$ и $MO < MO_1$, $O_1B_2 < OB$ / $\triangle MOB \sim \triangle MO_1B_2$
(т.к. $O_1B_2 \parallel OB$))

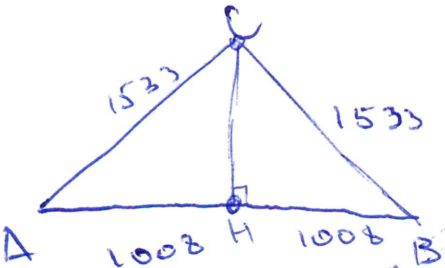
№3.

По условию, в записи могут использоваться 1, 2, 4, 5, 7, 8
Поймем, что каждое из них участвовало в 6^4 чисел на определённом месте => ответ:

$$1(6^4\cdot 1+6^4\cdot 10+6^4\cdot 100\cdot 6^4\cdot 1000+6^4\cdot 10000)+2(\ldots)+\ldots+8(\ldots)=(1+2+4+5+7+8)\cdot 6^4\cdot(1+10+100+1000+10000)$$
$$=27\cdot 6^4\cdot 11111=299997\cdot 6^4.$$

Заметим, что каждый раз ~~считаем~~ складываем не само число, а его часть (какой-то разряд), например $5\cdot 6^4\cdot 100$ – это сумма ~~по всем обозначениям~~ частей чисел, где 5 было на 3 месте справа, т.е. всего 6^4 по 500. (6^4 – т.к. одно число зафиксировали и 4 остальных меняем 6 способами каждое)

№4.



H – ~~все~~ осн. высоты из C на AB.

$CH=\sqrt{CB^2-BH^2}=\sqrt{1533^2-1008^2}=1155$

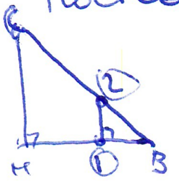
~~Отоб~~ достроим $\triangle CHB$ до квадрата.

Строго в нем будет $1007\cdot 1154$ узлов.

Посмотрим сколько будет узлов на CB

Заметим, что ∃ есть  $\left(55=\frac{1155}{21}, 48=\frac{1008}{21}\right)$.

Посмотрим, на ~~какой узел ближний~~ ~~ближний к B~~ ~~не являющийся B~~ любой узел на CB, не C и не B.



Заметим, что ①B – целое число и ①② тоже целое.
также $\triangle BCH \sim \triangle B②①$ (по 2м углам) => ~~①k = BH~~

$\frac{B①}{①②}=\frac{BH}{CH}$ или $B①\cdot CH = BH\cdot ①②$ или

$1155\cdot B① = 1008\cdot ①②$ или $55\cdot B① = 48\cdot ①②$, т.к.

$(55, 48)=1$ и ~~B① B② минимальные (=> ①② и B① тоже минимальны)~~

$B①=48k$ и $①②=55k$ => на CB 22 узла (с концами).

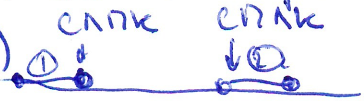
=> Строго внутри $\triangle CHB$ будет $\frac{1007\cdot 1154-20}{2}$ узла

Посчитаем общее кол-во узлов: AC – 1534, CB – 1534, AB – 2017, CH – 1156, внутренность $\triangle CHB$ – $\frac{1007\cdot 1154-20}{2}$, ~~внутренность~~ $\triangle ACH$ – $\frac{1007\cdot 1154-20}{2}$. Заметим, что AHB посчитали 2 раза.

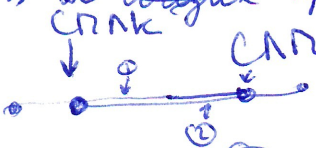
а С - 3 раза. Поэтому ответ: $2\left(\frac{1007\cdot 1154-20}{2}\right)+1156\cdot$
$2\cdot 1534+2017-3\cdot 1-2=1007\cdot 1154-21+1155+1533\cdot 2+2016$
$=1168294$

N5.

Спроецируем наши прямоугольники на оси. Заметим, что 2 прямоугольника (ПУ) пересекаются, ~~если~~ только тогда, когда обе их проекции на обе оси пересекаются друг с другом.
Найдём проекции одного ~~прям~~ ПУ на осях, пересекающие все другие проекции на своих осях, если мы его найдем, то и ПУ, соответствующий данной паре проекций, будет пересекать все другие ПУ.
Рассмотрим самый левый правый край ~~отрезка~~ проекции и самый правый левый край:

1) 

(это значит, что все ПК лежат правее СЛПК и все ЛК края лежат левее СПЛК) Заметим, что ① пересекается с ≥ 90 другими проекциями и ② тоже с ≥ 90.
$\Rightarrow \geq 80$ ~~общих~~ проекций, кот. пересекают на обоих $\Rightarrow$ и всех других ⊛

2) 

(то что было в скобке сверху) $\Rightarrow$ любой отрезок пересекает отрезок [СЛПК, СПЛК] $\Rightarrow$ все отрезки пересекают друг друга

~~① и ② ⇒ ① и ②~~

$\Rightarrow$ мы сможем найти такой ПУ, что его проекции будут среди этих общих (т.к. $\geq 80+80>100$)
$\Rightarrow$ мы нашли такой ПУ, что он пересекает все другие ПУ.

⊛ (Заметим, что все ~~отрезки~~ проекции имеют общую точку с отрезком [СЛПК, СПЛК], иначе ЛК или ПК соответственно правее СПЛК или левее СЛПК, чего не бывает по (то что было написано в скобках сверху)

3 стр