

Задача 2.

$$n=1: 2^1 + 1^{2016} = 2 + 1 = 3 - \text{уд.} \quad n \in \mathbb{N} \quad 2^n + n^{2016} - \text{простое?}$$

$$n=2: 2^2 + 2^{2016} = 2^2(1 + 2^{2014}) - \text{делится нацело на 4} - \text{не уд.}$$

1) при четном n : единственное простое четное число - 2, т.к. $n \in \mathbb{N}$, то $2^n + n^{2016} > 2$ - не уд.

Значит, для любого четного n не найдется простого числа вида $2^n + n^{2016}$.

2) для нечетных n рассмотрим остатки от деления n на 3:

$$a) n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2 \equiv 2 \equiv (-1) \pmod{3}$$

$$n^{2016} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \pmod{3}, \text{ т.к. } n \text{ нечетное.}$$

$$2^n + n^{2016} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ т.е. данное число кратно 3 и не является простым - не уд.}$$

$$b) n \equiv 2 \equiv (-1) \pmod{3}$$

$$n^{2016} \equiv 1 \pmod{3}, \text{ т.к. } 2016 \text{ четное.}$$

$$2^n \equiv (-1)^n \equiv (-1) \pmod{3}, \text{ т.к. } n \text{ нечетное}$$

$$2^n + n^{2016} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ т.е. данное число кратно 3 и не является простым - не уд.}$$

$$b) n \equiv 0 \pmod{3}, \text{ пусть } n = 3a, \text{ исходное число равно } b.$$

$$b = 2^{3a} + (3a)^{2016} = (2^a)^3 + ((3a)^{672})^3 = (2^a + (3a)^{672})(2^{2a} - 2^a \cdot (3a)^{672} + (3a)^{1344})$$

$$\begin{cases} 2^a + (3a)^{672} = 1 \\ 2^{2a} - 2^a \cdot (3a)^{672} + (3a)^{1344} = b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2^a + (3a)^{672} = b \\ 2^{2a} - 2^a \cdot (3a)^{672} + (3a)^{1344} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(1): \text{ т.к. } n \in \mathbb{N}, n = 3a, \text{ то } a > 0, 3a \in \mathbb{N}: 2^a + (3a)^{672} > 1 - \text{не уд.}$$

При увеличении числа a , будет увеличиваться и число $(2^a + (3a)^{672})$.

$$(2): 2^{2a} - 2^a \cdot (3a)^{672} + (3a)^{1344} = 1$$

$$\underbrace{(2^a - (3a)^{672})^2}_{\geq 0} + \underbrace{3 \cdot 2^a \cdot (3a)^{672}}_{\geq 3} > 3 - \text{не уд.}$$

Аналогично, при увеличении a , увеличивается и число.

Значит, $n=1$ - единственное решение.

Ответ: $n=1$.