

Задача 1.

Доску 1000×1000 можно раскрасить так, чтобы на ней было более 600 000 синих равновесных клеток.

Красить доску будем так, как представлено на примере.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Синие окрашены клетки с точкой
внутри - это равновесные клетки
В первом столбике нет равновесных клеток
Во втором столбике: группа
Таких групп будет $1000 : 3 = 333$ и ещё одна
большая клетка
В каждой группе 2 равновесных, всего
 $333 \cdot 2 = 666$ клеток

В 3-м и 4-ом столбиках таких групп 333 по 3 клетки, но
в первой группе вместо двух - одна клетка, то есть в
3-м и 4-ом столбике по $333 \cdot 2 - 1 = 665$ равновесных
клеток

То есть в сумме 2, 3, 4 столбиках будет клеток $333 \cdot 2 + 333 \cdot 2 - 1 +$
 $+ 333 \cdot 2 - 1 = 6 \cdot 333 - 2 = 1996$ клеток

Таких вертикальных групп можно будет: $(1000 : 3) - 1 = 332$,
в каждой группе 1996 клеток и ещё 2 столбика 998 и 999

В 998-ом будет 666 клеток, а в 999-ом столбике будет 665 клеток

Итого мы получаем $332 \cdot 1996 + 666 + 665 = 664003$ клеток.

$$664003 > 600000 !$$

что и требовалось доказать.

$$\begin{array}{r} \times 1996 \\ 332 \\ \hline 5988 \\ 3992 \\ \hline 5988 \\ 5988 \\ \hline 662672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 662672 \\ + 665 \\ + 666 \\ \hline 664003 \end{array}$$

Ответ: можно.

Задача 3. (начало)

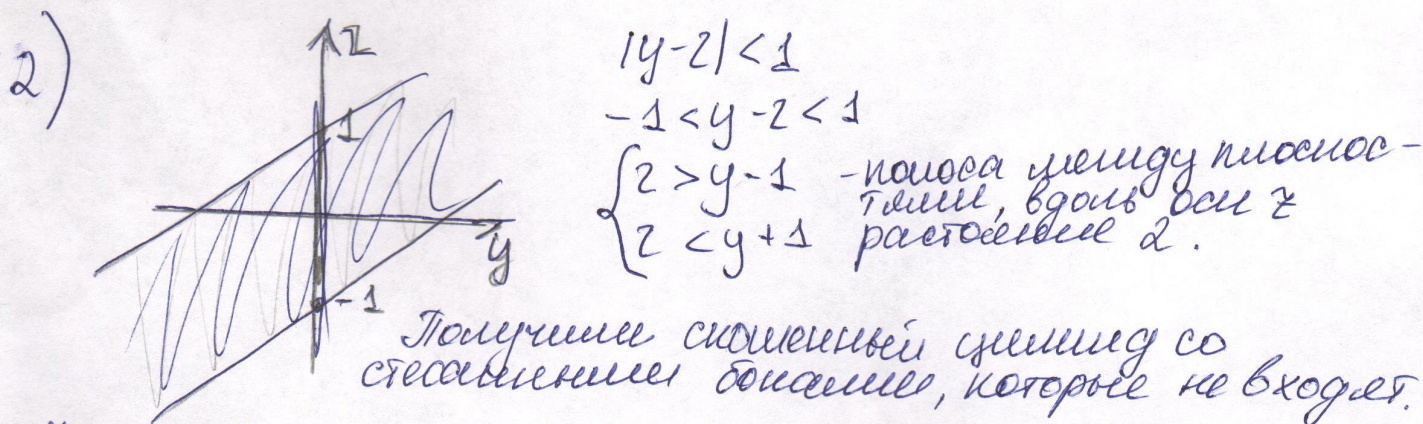
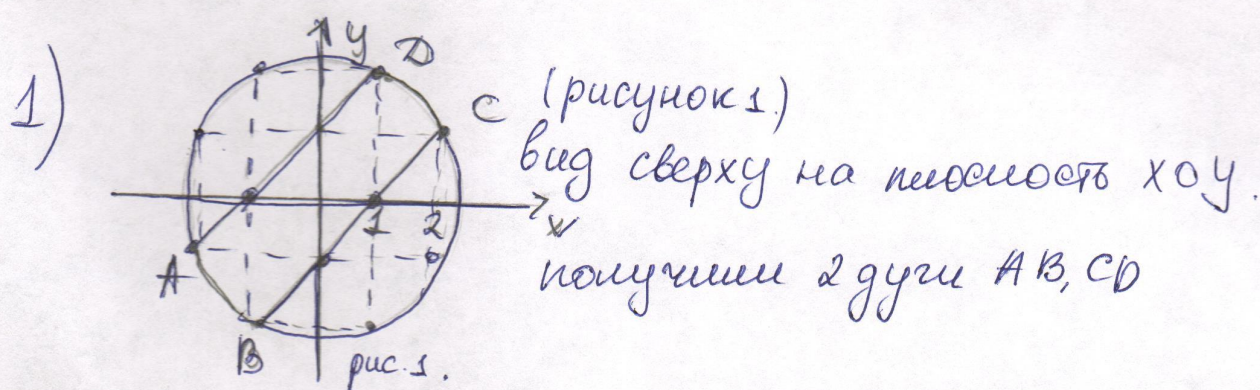
Определимся, что это за множество точек, удовлетво-
ряющих ~~в~~ условию $x^2 + y^2 \leq 5$ - цилиндр с радиусом
 $\sqrt{5}$. с осью в точке $(0;0)$ без внутренней области.

$|x-y| < 1$ - полоса между ~~поверх~~ плоскостями, без
границ,

$$-1 < x-y < 1$$

$$\begin{cases} y > x-1 \\ y < x+1 \end{cases}$$

- расстояние между плоскостями 2.

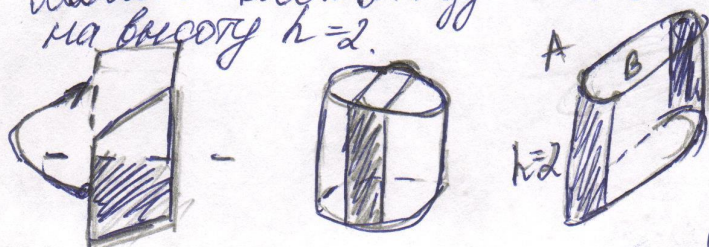


Нам необходимо найти площадь поверхности заштрихован-
ных частей.

Разрежем нашу фигуру плоскостью,
перпендикулярной оси z и поставим
нижнюю часть на верхнюю.

Получим прямой цилиндр со
срезанными боками и высотой 2.

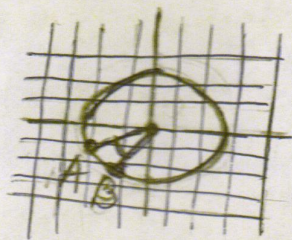
Тогда площадь заштрихованных частей
можно найти: удвоенное произведение длины дуги AB
на высоту $h=2$.



(продолжение на след странице)

Задача 3 (продолжение)

Найдем длину дуги AB .



по теореме косинусов:
из $\triangle AOB$:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$$

$$2 = 5 + 5 - 2 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10}$$

Тогда $\angle AOB = \arccos \frac{4}{5}$.

$$AB = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot n =$$

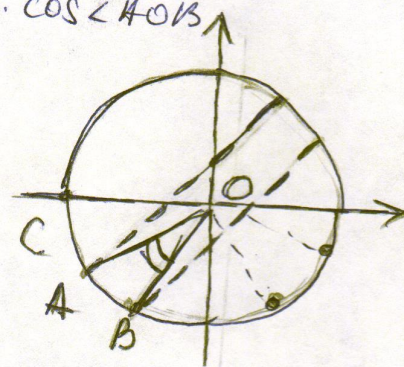
$$= \sqrt{5} \cdot \arccos \frac{4}{5}$$

Таких фигур 2 штуки

Тогда искомая площадь:

$$S = AB \cdot 2 \cdot 2$$

$$S = 4 \cdot \sqrt{5} \cdot \arccos \frac{4}{5}$$



Ответ: $4 \cdot \sqrt{5} \cdot \arccos \frac{4}{5}$.

Задача 2

где $n=1$ тогда $2^n + 2^{2016} = 3$ - простое
 где $n=2k$ $2^{2k} + (2k)^{2016} = 2^k + 2^{2016} \cdot k^{2016} = \dots$ 2 - составное
 где $n=2k+1$ $2^{2k+1} + (2k+1)^{2016}$

Выделим полный квадрат

$$\frac{2 \cdot 2^{2k} \cdot (2k+1)^{2016}}{(2k+1)^{2016}} + (2k+1)^{2016} + \frac{2^{4k}}{(2k+1)^{2016}} \cdot \frac{2^{4k}}{(2k+1)^{2016}} =$$

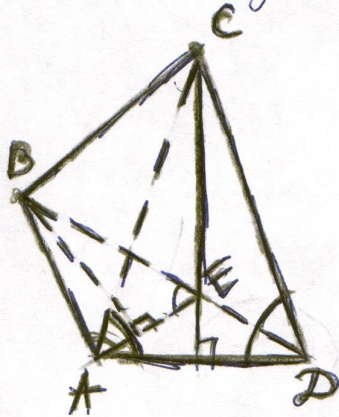
$$= \frac{(1(2k+1)^{2016})^2 + 2 \cdot 2^{2k} \cdot (2k+1)^{2016} + (2^{2k})^2}{(2k+1)^{2016}} - \frac{(2^{2k})^2}{(2k+1)^{2016}} = \frac{((2k+1)^{2016} + 2^{2k})^2}{(2k+1)^{2016}} -$$

$\frac{(2^{2k})^2}{(2k+1)^{2016}}$ Это разность квадратов, раскладывается на множители:

$$= \frac{(2k+1)^{2016} \cdot ((2k+1)^{2016} + 2 \cdot 2^{2k})}{(2k+1)^{2016}}$$

Ответ: 1 и 3.

Задача 4.



Дано: ABCD - четырехугольник

$$\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$$

$$\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$$

$$\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$$

Доказать, что $\triangle BEC$ - равнобедренный

Обозначим середину AD точкой M, т.е. $AM = MD = a$, $CM \perp AD$ (по признаку $\triangle ACD$ - равнобедренный по свойству равнобедренного треугольника CM - медиана, высота)

Аналогично EM - медиана, высота $\triangle AED$, тогда EM и CM - совпадают (т.к. перпендикуляр к прямой в точке M - единствен) т.е. ось E лежит на CM.

$$\text{Из } \triangle AME: EM = a \cdot \tan 50^\circ, \text{ а из } \triangle ACM: \text{ тогда } CE = CM - EM = a \cdot (\tan 80^\circ - \tan 50^\circ) = a \left(\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} - \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} \right) = \frac{a \sin(80^\circ - 50^\circ)}{\cos 180^\circ \cos 50^\circ} = \frac{a}{2 \sin 10^\circ \sin 40^\circ}$$

$$\text{Из } \triangle AEM: AE^2 = EM^2 + AM^2 = a^2 \tan^2 50^\circ + a^2 = a^2 (1 + \tan^2 50^\circ) = a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 50^\circ} = \frac{a^2}{\sin^2 40^\circ}$$

$$AE = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 40^\circ}} = \frac{a}{\sin 40^\circ}$$

Пусть P - середина AE, тогда $BP \perp AE$, т.к. $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$

$$\text{Значит, } PE = \frac{AE}{2} = \frac{a}{2 \sin 40^\circ}, \text{ а из } \triangle BPE: BE = x = \frac{PE}{\cos 80^\circ} = \frac{a}{2 \sin 40^\circ \cos 80^\circ} = \frac{a}{2 \sin 40^\circ \sin 10^\circ}$$

$$\text{Получим } CE = BE = \frac{a}{2 \sin 10^\circ \sin 40^\circ}$$

$$\text{Из } \triangle AEM: \angle AEM = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ; \angle BEC = 180^\circ - (\angle AEM + \angle AEB) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$$

т.к. $BE = CE$ и $\angle BEC = 60^\circ$, то $\triangle BEC$ - равнобедренный.

Ответ: $\checkmark$ т.д.

Задача 5.

Сетов размера 0 не существует (чисел меньше, чем кисток)

Сет размера 4:

Пример:

1	1	2	3	1 число
2	2	3	2	2 число
3	3	1	1	3 число

для каждого разряда считаем число перестановок.

Всего будет $(3!)^4 = 6^4$ вариантов.

Учтем симметричные числа, меньшие строим неяснее: $(3!)$ раз.

Тогда всего сетов размером 4 будет:

$$\frac{(3!)^4}{(3!)} = 3!^3 = 216.$$

Сет размера 3:

Один из разрядов фиксируем. Но мы его фиксируем $C_4^1 = 4$ разными способами и выбираем его 3-мее ручными способами. То есть $\frac{C_4^1 \cdot 3(3!)^3}{3!} = 12(3!)^2 = 12 \cdot 6^2 = 432$

Сет размера 2:

$$\frac{C_4^2 \cdot 3^2(3!)^2}{3!} = 9 \cdot 3! = 216.$$

Сет размера 1:

$$\frac{C_4^3 \cdot 3! \cdot 3^3}{3! \cdot 1} = 27 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1} = 27 \cdot 4 = 108.$$

Ответ: наибольшее количество сетов сложности 3, их будет 432.