Гребенников Александр

№1

k - чётно, т.к. иначе $\left(\frac{k}{2}\right)!$ не определён.

<u>Лемма.</u> Если для некоторого $k>4$, $\left(\frac{k}{2}\right)!\cdot\frac{k}{4}\geqslant 2016+k^2$, то для

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)!\cdot\frac{k+2}{4}>2016+(k+2)^2$$

Действительно, левая часть увеличилась в $\dfrac{\left(\frac{k+2}{2}\right)!\cdot\frac{k+2}{4}}{\left(\frac{k}{2}\right)!\cdot\frac{k}{4}}=\frac{k+2}{2}\cdot\frac{k+2}{k}>$

$>\frac{k(k+2)}{2k}=\frac{k+2}{2}$ раз, а правая - в $\frac{2016+(k+2)^2}{2016+k^2}=1+\frac{4k+4}{2016+k^2}<2$ (т.к. $k^2>4k$ при $k>4$, $2016>4$).

$\frac{k+2}{2}>2$ (при $k>4$), а $1+\frac{4k+4}{2016+k^2}<2$ $\Rightarrow$ левая часть увеличилась сильнее, чем правая, т.е. раз $\left(\frac{k}{2}\right)!\cdot\frac{k}{4}\geqslant 2016+k^2$, $\frac{k+2}{2}>1+\frac{4k+4}{2016+k^2}$, то

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{k}{2}\right)!\cdot\frac{k}{4}>\left(2016+k^2\right)\left(1+\frac{4k+4}{2016+k^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)!\cdot\frac{k+2}{4}>2016+(k+2)^2$$

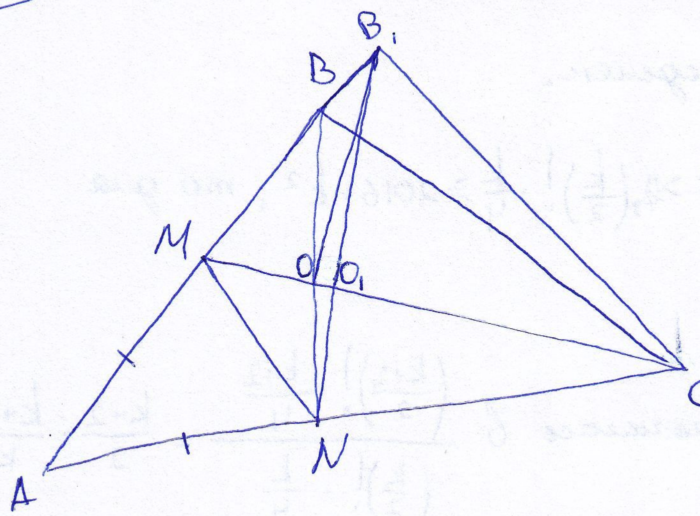
$k=2$	$1!\cdot 0{,}5=0{,}5\neq 2016+4=2020$
$k=4$	$2!\cdot 1=2\neq 2016+16=2032$
$k=6$	$3!\cdot 1{,}5=9\neq 2016+36=2052$
$k=8$	$4!\cdot 2=48\neq 2016+64=2080$
$k=10$	$5!\cdot 2{,}5=300\neq 2016+100=2116$
$k=12$	$6!\cdot 3=2160=2016+144=2160$ ✓ - подходит

Тогда по <u>лемме</u> никакое $k>12$ не подходит.

Ответ: $k=12$.

№2

Гребенников Александр



Предположим обратное.

Пусть, не умаляя общности, $AB < AC$. Тогда продлим AB за точку B на расстояние $AC - AB$.

1) $AB_1 = AC$

$\Delta AMN \sim \Delta AB_1C$ $\left(\frac{AM}{AB_1} = \frac{AN}{AC_1},\ \angle A \text{ - общий}\right)$

$\Downarrow$

$\angle AMN = \angle AB_1C$

$\Downarrow$

$MN \parallel B_1C$

$\Downarrow$

MB_1CN - трапеция

2) $MB_1 = AB_1 - AM$, $CN = AC - AN$ $\Rightarrow MB_1 = CN \Rightarrow MB_1CN$ - равнобокая трапеция

3) Тогда $MO_1 = NO_1$, $BO_1 = CO_1$ (св-во равнобокой трапеции)

4) $BO = CO$ (по условию) $= CO_1 + O_1O = BO_1 + O_1O > B_1O$ (неравенство треугольника)

5) $AB > AN \Rightarrow \angle ABN < 90° \Rightarrow \angle B_1BN > 90°$

(против большей стороны лежит больший угол)

Но $B_1O < BO \Rightarrow \angle BB_1O > \angle B_1BN > 90°$, и тогда в ΔBB_1O 2 тупых угла, что невозможно - противоречие

Значит, наше предположение было неверным и ΔABC - равнобедренный.

Гребенников Александр

№3

Назовём число хорошим, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3.

Пусть общая сумма цифр всех хороших n-значных чисел равна m.

Тогда к каждому из этих чисел можно слева приписать одну из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8. Таким образом можно получить все хорошие n+1-значные числа и причём по одному разу => общая сумма цифр всех хороших n+1-значных чисел равна $(1+2+4+5+7+8)m = 27m$.

Общая сумма цифр 1-значных хороших чисел равна $1+2+4+5+7+8=27$

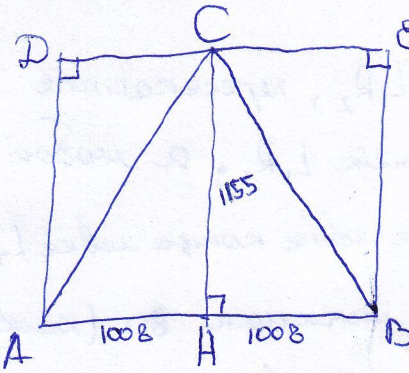
$\Downarrow$

общая сумма цифр чисел, которые нравятся Лидии, равна $27 \cdot 27^4 = 27^5 = 14.348.907$

Ответ: 27^5 (или 14.348.907)

№4

h (высота $\triangle ABC$ из вершины C) $= \sqrt{1533^2 - \left(\frac{2016}{2}\right)^2} = 1155$



в прямоугольнике ADCH лежит $(1008+1)(1155+1) = 1\,166\,404$ узлов, из которых 22 лежат на диагонали AC (НОД(1008, 1155) = 21).

$\Downarrow$

в $\triangle AHC$ лежит $\frac{1166404 - 22}{2} + 22 = 583.213$ узлов.

Аналогично с $\triangle BHC$.

Гребенников Александр

На высоте CH лежат $1155+1=1156$ узлов (они лежат и в $\triangle AHC$, и в $\triangle BHC$) => всего в $\triangle ABC$ лежит $583\,213 \cdot 2 - 1156 = 1\,165\,270$ узлов.

Ответ: $1\,165\,270$ узлов.

№5

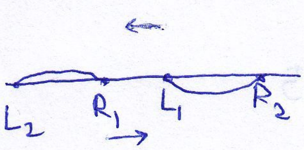
Лемма. Если на прямой отмечено 100 отрезков и каждый пересекается хотя бы с 90 другими, то найдутся хотя бы 80 отрезков, пересекающихся со всеми.

Рассмотрим самый правый из всех левых концов отрезков и самый левый из всех правых концов отрезков (L_1 и R_1):

1) 

(L_1R_2 и L_2R_1 - отрезки)

Тогда любой отрезок содержит в себе отрезок L_1R_1 => любые два отрезка пересекаются.

2) 

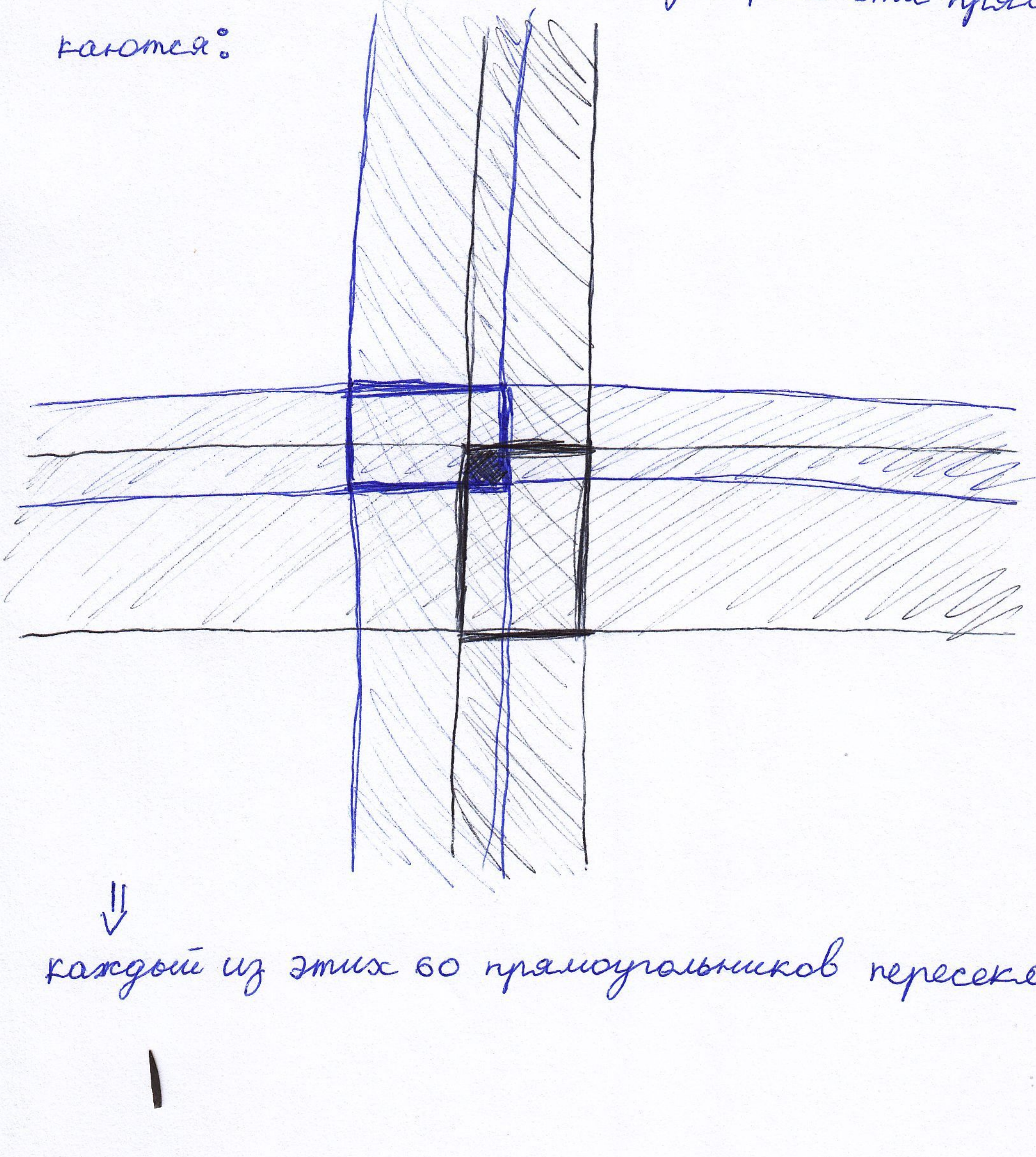
Тогда любой отрезок, пересекающий и L_2R_1, и L_1R_2, пересекается со всеми; т.к. он содержит в себе промежуток L_1R_1, а любой отрезок пересекается или касается L_1R_1 (все левые концы левее L_1, правые – правее R_1). А таких отрезков как минимум 80 (каждый из L_2R_1 и L_1R_2 не пересекает не более 10 отрезков).

Представим каждый прямоугольник как пересечение вертикальной и горизонтальной полос. По лемме найдутся 80 вертикальных полос, пересекающих все вертикальные, и 80 горизонтальных полос, пересекающих все горизонтальные (полосы можно

Гребенников Александр

считать отрезками на прямой; при этом если 2 полосы не пересекаются, то их прямоугольники не пересекаются тем более — отсюда условие, что каждая полоса пересекается хотя бы с 80 другими).

Таким образом, найдутся хотя бы $60 = 100-(100-80)-(100-80)$ прямоугольников, и вертикальные, и горизонтальные полосы которых пересекают все полосы этого же типа. А если горизонтальная полоса одного прямоугольника пересекает горизонтальную полосу другого, а вертикальная полоса — вертикальную, то эти прямоугольники пересекаются:



$\Downarrow$

каждый из этих 60 прямоугольников пересекает любой другой.