Задача №2.

$2^n + n^{2016}$ – простое, $n \in N$

Заметим, что при подстановке $n=2k$ мы получим число составное (2^{2k} – четное, $2k^{2016}$ – четное).
Выходит, что $n=2k+1$.
Теперь, посмотрим делится ли число n на 3.
Пусть $n \equiv 1 \pmod 3$. Тогда:

(т.к. степ. нос) $2^{(3m+1)} + (3m+1)^{2016} \equiv$
$\equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, т.е. число сост. – не уд.

Пусть $n \equiv 2 \pmod 3$. Тогда:

$2^{(3m+2)} + (3m+2)^{2016} \equiv 2 + (-1)^{2016} \equiv 2+1 \equiv 0 \pmod 3$ – не уд.

Значит, число $n \equiv 0 \pmod 3$:

$2^{3m} + 3m^{2016} \equiv 2 \pmod 3$ – уд.

Можем представить n в виде $3m$, $m \in N$

$2^{3m} + (3m)^{2016} = (2^m)^3 + ((3m)^{672})^3 = (2^m + (3m)^{672}) \cdot$
$\cdot ((2^m)^2 - 2^m (3m)^{672} + ((3m)^{672})^2) = (2^m + n^{672})(2^{2m} - 2^m \cdot n^{672} + n^{1344})$

Чтобы число было простым, нужно, чтобы один из данных множителей был $= 1$.

1) $2^m + n^{672} = 1$, а $(2^{2m} - 2^m \cdot n^{672} + n^{1344})$ – простое
числа m и $n \in N \Rightarrow 2^m + n^{672}$ не может быть равно 1.

2) $(2^m + n^{672})$ – простое, а $(2^{2m} - 2^m \cdot n^{672} + n^{1344}) = 1$

$2^{2m} - 2^m \cdot n^{672} + n^{1344} = 2^{2m} - 2 \cdot 2^m \cdot n^{672} + n^{1344} + 2^m \cdot n^{672} =$
$= \underbrace{(2^m - n^{672})^2}_{>1} + \underbrace{2^m \cdot n^{672}}_{>1} \Rightarrow$ множитель $\neq 1$.

Выходит, что при $n \geq 2$: $n \in \varnothing$.
$n = 1$: $2^1 + 1^{2016} = 3$ – уд. – единств. решение.

Ответ: $n = 1$.