Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Решения

По техническим причинам все изображения помещены в конце файла.

Задачи для 5 класса

1. В некотором языке есть 3 гласных и 5 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

2. Приведите пример таких целых чисел a и b, что $ab(2a+b) = 2015$.

3. Маша с Леной вышли из дома и пошли в магазин за мороженым. Маша шла быстрее и дошла до магазина за 12 минут. Потратив 2 минуты на покупку мороженого, она пошла назад и встретила Лену ещё через 2 минуты. Сколько времени потребовалось Лене, чтобы дойти до магазина? Скорости девочек постоянны.

4. Шестеро школьников решили посадить в школьном дворе 5 деревьев. Известно, что каждое дерево сажало разное число школьников и каждый школьник участвовал в посадке одинакового количества деревьев. Могло ли так случиться?

5. В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что площадь первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Аня, Галя, Даша, Соня и Лена приехали в лагерь «Формула Единства» из разных городов: Курска, Вологды, Новороссийска, Петрозаводска и Чебоксар. Знакомясь с другими членами отряда, они рассказали о себе следующее. Соня и Даша никогда не были в Курске. Галя и Соня были вместе в прошлом лагере с девочкой из Новороссийска. Аня и Соня подарили девочке из Чебоксар по сувенирчику. Галя и Соня помогли девочке из Вологды занести вещи в комнату. Галя и Лена общаются по скайпу с девочкой из Чебоксар, а девочка из Новороссийска переписывается в контакте с Аней. Кто где живёт?

Решения задач 5 класса

1. В языке есть $3 \cdot 5 = 15$ слогов вида «согласная+гласная» и ещё столько же слогов вида «гласная+согласная», итого 30 различных слогов. Общее количество слов из двух слогов равно $30 \cdot 30 = 900$.

2. Разложим 2015 на множители: $2015 = 13 \cdot 31 \cdot 5$. Теперь легко найти подходящие числа: $a = 13, b = 5$.

3. Маша за 2 минуты проходит 1/6 всего пути, значит, в момент встречи Лена прошла 5/6 пути, на это ей потребовалось 16 минут. Значит, 1/6 пути Лена проходит за $16 : 5 = 3\frac{1}{5}$ минут, т.е. за 3 минуты 12 секунд. На весь путь ей потребуется 19 минут 12 секунд.

4. Да, такое возможно. Вот пример распределения деревьев между школьниками:

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5
Школьник 1	+	+			+
Школьник 2		+		+	+
Школьник 3			+	+	+
Школьник 4			+	+	+
Школьник 5			+	+	+
Школьник 6			+	+	+

5. Да, такое возможно. Например, площадь прибрежных вод у острова 1 км $\times$ 1000 км больше, чем у острова 100 км $\times$ 100 км. (В первом случае прибрежные воды содержат дае полосы 50×1000 км, их суммарная площадь 100 000 км^2. А во втором случае остров вместе с прибрежными водами помещается в квадрат 200×200 км, площадь которого всего 40 000 км^2.)

6. 1) Аня и Соня — не из Чебоксар, Галя и Лена — тоже не из Чебоксар. Значит, в Чебоксарах живёт Даша.
   2) Галя и Соня — не из Новороссийска, Аня не из Новороссийска, значит, там живёт Лена.
   3) Галя и Соня не из Вологды, поэтому там живёт Аня.
   4) Соня (и Даша) не из Курска, значит, в Курске живёт Галя, а Соня — в Петрозаводске.

   Ответ: Аня из Вологды, Галя из Курска, Даша из Чебоксар, Соня из Петрозаводска, Лена из Новороссийска.

Задачи для 6 класса

1. В некотором языке есть 5 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

2. Приведите пример таких целых чисел a и b, что $ab(2a+b) = 2015$.

3. На столе лежат три конфеты. У Ани и Лены есть мешок с неограниченным количеством конфет, и они играют в игру. Каждая из них своим ходом добавляет некоторое количество конфет из мешка на стол, но при этом не может положить больше конфет, чем уже лежит на столе. Девочки ходят по очереди, начинает Аня. Выигрывает та, после хода которой на столе окажется ровно 2015 конфет. Кто из девочек может обеспечить себе победу, как бы ни играла соперница?

4. Шестеро школьников решили посадить в школьном дворе 5 деревьев. Известно, что каждое дерево сажало разное число школьников и каждый школьник участвовал в посадке одинакового количества деревьев. Могло ли так случиться?

5. В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Дима варит кашу. Чтобы каша получилась вкусной, ему нужно варить крупу ровно 24 минуты. Обычных часов у Димы нет, но есть двое песочных часов: одни — на 20 минут, другие — на 7 минут. Как Диме точно отмерить требуемое время?

Решения задач 6 класса

1. В языке есть $5 \cdot 7 = 35$ слогов вида «согласная+гласная» и ещё столько же слогов вида «гласная+согласная», итого 70 различных слогов. Общее количество слов из двух слогов равно $70 \cdot 70 = 4900$.

2. См. решение задачи 2 для 5 класса.

3. Заметим, что девочка, перед ходом которой на столе лежит 1007 конфет, обязательно проиграет. Действительно, после её хода на столе будет лежать от 1008 до 2014 конфет, и её соперница в любом случае сможет получить 2015 конфет. Значит, девочка, после хода которой на столе окажется 1007 конфет, выиграет. Аналогично рассуждая, получим все выигрышные позиции, которые соответствуют 6, 14, 30, 62, 125, 251, 503, 1007 конфетам на столе. Таким образом, Аня первым ходам может попасть в выигрышную позицию, сделав 6 конфет. После этого на каждый ход Лены Аня отвечает переходом в следующую выигрышную позицию, пока не перейдёт в позицию 2015. Таким образом, при правильной игре выигрывает Аня.

4. См. решение задачи 4 для 5 класса.

5. Нет, это невозможно. Прибрежные воды состоят из четырёх прямоугольных полос вдоль берегов и четырёх четвертей круга с радиусом 50 км. Площадь четвертей круга всегда одинакова, а суммарная площадь полос равна периметру прямоугольника, умноженному на 50 км. Поэтому с ростом периметра увеличивается и площадь прибрежных вод.

6. Заметим, что 8 промежутков по 7 минут составляют 56 минут, а 4 промежутка по 20 минут составляют 80 минут. Таким образом, нужно одновременно запустить часы и переворачивать их в нужное время; когда пройдёт восемь 7-минутных промежутка, поставить кашу вариться, а по прошествии четырёх 20-минутных промежутков выключить её.

   Возможны и другие способы решения.

Задачи для 7 класса

1. В некотором языке есть 3 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

2. Приведите пример таких целых чисел a и b, что $(10a + b)(a + 10b)(a + b + 1) = 2015$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC (какие две из сторон треугольника равны, неизвестно) проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Известно, что $\angle AOB = 120°$. Найдите углы треугольника ABC.

4. По вновь придуманным правилам в каждом математическом бою участвуют одновременно 3 команды. Организаторы хотят провести турнир из нескольких (более одного) боёв так, чтобы каждые две команды встречались между собой ровно один раз. Какое наименьшее число команд нужно для этого пригласить?

5. В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметры этих островов одинаковы, а площадь прибрежных вод у них различается? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. На плоскости нарисован 2015-угольник со всеми диагоналями. Дима с Сашей играют в следующую игру. Они поочерёдно стирают либо от 1 до 10 соседних сторон нарисованного многоугольника, либо от 1 до 9 его диагоналей. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Первым ходит Дима. Кто из играющих может обеспечить себе победу при любой игре соперника? Как он сможет это сделать?

Решения задач 7 класса

1. Поскольку слог состоит из двух разных букв, то одинаковые буквы могут появиться только на стыке слогов.

   Найдём сначала количество комбинаций из двух слогов с совпадающей буквой на стыке. Такие слоги (с точки зрения расположения гласных и согласных) имеют вид либо АММО ($3 \cdot 7 \cdot 3$ вариантов), либо МААН ($7 \cdot 3 \cdot 7$ вариантов), итого 210 вариантов.

   Получить из каждой такой комбинации забавное слово можно двумя способами — добавить произвольный слог либо в начало, либо в конец. Поскольку в языке 42 слога ($7 \ldots 3 = 21$ слог вида МА и ещё 21 слог вида АМ), то каждый из этих способов даёт $210 \cdot 42$ слов.

   При этом некоторые слова учтены дважды. Это слова, в которых совпадают и буквы на стыке первого слога со вторым, и буквы на стыке второго с третьим. Очевидно, все такие слова имеют вид АММООН или МААННО, и их количество равно $3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 + 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = 2 \cdot 21^2$.

   Ответ: $2 \cdot 210 \cdot 42 - 2 \cdot 21^2 = 16758$ забавных слов.

2. Разложим 2015 на множители: $2015 = 13 \cdot 31 \cdot 5$. Теперь легко найти подходящие числа: $a = 1, b = 3$ (или наоборот).

3. *См. рисунок в конце файла.*

   Как известно, медианы треугольника пересекаются в одной точке. Проведём третью медиану CC_1, проходящую через O. Заметим, что оба угла AOC и BOC равны $120°$ независимо от того, какие именно стороны треугольника ABC равны.
   Действительно, если $AC = BC$, то CO — биссектриса угла ACB, поэтому $\triangle AOC = \triangle BOC$, и $\angle AOC = \frac{360°-120°}{2} = 120°$.
   Если же $AB = AC$, то по тем же соображениям $\angle AOC = \angle AOB = 120°$, так что угол BOC также равен $120°$.

   Итак, все три угла $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ равны $120°$. Из этого можно вывести равенство любых двух сторон.
   Докажем, например, что $AB = AC$. Действительно, OA_1 — биссектриса и медиана $\triangle BOC$, поэтому это и его высота. Значит, AA_1 – высота и медиана $\triangle ABC$, поэтому в нём $AB = AC$, что и требовалось доказать.

4. *Ответ:* 7 команд.

   Пример. В турнире участвуют команды с номерами от 1 до 7; бои таковы: 124, 235, 346, 457, 561, 672, 713.

   Оценка. Пусть в одном из боёв команда 1 играет с командой 2 и командой 3. Поскольку это не единственный бой, то есть ещё команды, и с ними тоже должна играть команда 1. Значит, ещё в каком-то бою она играет с двумя другими командами, назовём их 4 и 5. Итак, среди проведённых боёв есть 123 и 145.

Предположим, что в турнире всего 5 команд. Тогда команда 2, кроме боя с командами 1 и 3, должна участвовать ещё в одном бою. Это может быть только бой с командами 4 и 5. Но эти команды уже встречались в одном бою (145). Значит, пяти команд недостаточно.

Тогда команда 1, кроме боёв 123 и 145, должна участвовать ещё хотя бы в одном бою с двумя новыми соперниками, назовём их командами 6 и 7. Значит, в турнире участвуют не менее семи команд.

5. *Ответ:* нет, это невозможно.

   Решение. Прибрежные воды состоят из трёх прямоугольных полос вдоль берегов и трёх секторов круга с радиусом 50 км.

   Заметим, что угол в каждом секторе круга равен $180° - \alpha$, где α — соответствующий угол треугольника, т.е. равен внешнему углу треугольника. Поэтому суммарная градусная мера углов при секторах равна сумме внешних углов треугольника, а именно 360°. Таким образом, эти три сектора вместе составляют круг, площадь которого постоянна.

   Суммарная площадь полос равна периметру треугольника, умноженному на 50 км. Поэтому при равных периметрах эта площадь одинакова, а при увеличении периметра она возрастает. То же верно и для общей площади.

6. *Ответ:* выигрывает второй. Его стратегия описана ниже.

   Второй будет стирать объекты того же типа, что и первый предшествующим ходом (т.е. на стирание сторон будет отвечать стиранием сторон, а на стирание диагоналей — стиранием диагоналей). Поэтому игра распадается на две (игра на сторонах и игра на диагоналях), и достаточно понять, как второй побеждает в каждой из этих игр.

   Игра на сторонах. Первый игрок своим первым ходом стирает несколько соседних сторон. Второй должен стереть несколько диаметрально противоположных сторон так, чтобы осталось две части по одинаковому количеству сторон (это всегда можно сделать: второй стирает одну или две стороны в зависимости от того, чётное или нечётное количество сторон стёр первый). После этого второй симметрично повторяет ходы первого, сделанные им на сторонах: если первый стирает несколько сторон в одной части, то второй стирает аналогичные стороны в другой части.

   Игра на диагоналях. Ход игры зависит только от общего количества диагоналей. Посчитаем это количество. Заметим, что из каждой вершины выходят диагонали во все вершины, кроме неё и двух соседних, т.е. 2012 диагоналей. Тогда общее количество диагоналей должно быть $2015 \cdot 2012$. Но в этом случае каждая диагональ будет посчитана дважды (для каждой из двух вершин, которые она соединяет). Поэтому на самом деле диагоналей вдвое меньше, то есть $2015 \cdot 2012 : 2 = 2015 \cdot 1006 = 4030 \cdot 503$.
   Нам важно только то, что количество диагоналей делится на 10. Поэтому второй должен играть так, чтобы после его хода количество диагоналей делилось на 10 (если первый стёр одну диагональ, то второй стирает девять, если первый стёр две, то второй — восемь и т.д.).

Задачи для 8 класса

1. В некотором языке есть 3 гласных и 8 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется

забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

2. Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?

3. В равнобедренном треугольнике ABC (какие две из сторон треугольника равны, неизвестно) проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Известно, что $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

5. В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

Решения задач 8 класса

1. Поскольку слог состоит из двух разных букв, то одинаковые буквы могут появиться только на стыке слогов.

   Найдём сначала количество комбинаций из двух слогов с совпадающей буквой на стыке. Такие слоги (с точки зрения расположения гласных и согласных) имеют вид либо АММО ($3 \cdot 8 \cdot 3$ вариантов), либо МААН ($8 \cdot 3 \cdot 8$ вариантов), итого 264 варианта.

   Получить из каждой такой комбинации забавное слово можно двумя способами — добавить произвольный слог либо в начало, либо в конец. Поскольку в языке 48 слогов ($8 \ldots 3 = 24$ слога вида МА и ещё 24 слога вида АМ), то каждый из этих способов даёт $264 \cdot 48$ слов.

   При этом некоторые слова учтены дважды. Это слова, в которых совпадают и буквы на стыке первого слога со вторым, и буквы на стыке второго с третьим. Очевидно, все такие слова имеют вид АММООН или МААННО, и их количество равно $3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 = 2 \cdot 24^2$.

   Ответ: $2 \cdot 264 \cdot 48 - 2 \cdot 24^2 = 24192$ забавных слов.

2. Ответ: не может.

   Решение. Заметим, что количество частей, у которых концы разного цвета, нечётно. Действительно, это количество равно количеству перемен цвета в последовательности точек, а количество перемен цвета нечётно, поскольку цвета начальной и конечной точек не совпадают.

   Поскольку всего частей 2016, и из них нечётное количество имеет концы разных цветов, то число отрезков с концами одинакового цвета тоже нечётно. Поэтому отрезков с обоими синими концами и отрезков с обоими красными концами не может быть поровну.

3. См. решение задачи 3 для 7 класса.

4. Ответ: не могут.
   Решение. Не умаляя общности, можно считать, что $a \geq b$ и $c \geq d$. Заметим, что тогда $a = c$, в противном случае имеем:
   $$2015^a + 2015^b > 2015^a > 2015^{a-1} + 2015^{a-1} \geq 2015^c + 2015^d.$$
   Значит, $2015^b = 2015^d$, откуда $b = d$. Теперь очевидно, что
   $$a^{2015} + b^{2015} = c^{2015} + d^{2015}.$$

5. См. решение задачи 5 для 7 класса.

6. Обозначим число диагоналей в выпуклом n-угольнике через $d(n)$. Тогда задача переформулируется так: найти m, если $d(m) = k$, а $d(k) = 2015$.

   Найдём формулу для $d(n)$ (впрочем, достаточно широко известную).
   Заметим, что из каждой вершины выходят диагонали во все вершины, кроме неё и двух соседних, т.е. $n - 3$ диагонали. Тогда общее количество диагоналей должно быть $n(n-3)$ (n вершин и по $n - 3$ диагонали из каждой). Но в этом случае каждая диагональ будет посчитана дважды (для каждой из двух вершин, которые она соединяет). Поэтому на самом деле диагоналей вдвое меньше: $d(n) = (n(n-3))/2$.

   Итак, $k(k-3)/2 = 2015$, откуда $k^2 - 3k - 4030 = 0$, что для положительного k даёт
   $k = (3 + \sqrt{16129})/2 = (3 + 127)/2 = 65$;

   $m(m-3)/2 = 65$, откуда $m^2 - 3m - 130 = 0$, что для положительного m даёт
   $m = (3 + \sqrt{529})/2 = (3 + 23)/2 = 13$.

   Ответ: $m = 13$.

Задачи для 9 класса

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

2. Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?

3. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ выбраны соответственно такие точки M и P, что $AM = CP$. Окружность на диаметре DP пересекает отрезок CM в точке K. Докажите, что MK и BK перпендикулярны.

4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

5. В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

Решения задач 9 класса

1. См. решение задачи 4 для 8 класса.

2. См. решение задачи 2 для 8 класса.

3. *См. рисунок в конце файла.*

   Отметим на AD такую точку Q, что $DQ = PC$. Тогда $DCPQ$ — прямоугольник.
   Значит, точки C и Q лежат на окружности с диаметром DP. Точка K лежит там же, поэтому $\angle DQK + \angle DCK = 180^\circ$.
   Угол AQK — смежный с $\angle DQK$, поэтому $\angle AQK = \angle DCK$; далее, $\angle DCK = \angle BMC$, поскольку $AB \parallel CD$. Итак, $\angle AQK = \angle BMC$.
   В то же время $\angle AQB = \angle BMC$ как углы в равных (по двум катетам) прямоугольных треугольниках AQB и BMC.
   Значит, $AQK = AQB$, т.е. K лежит на прямой BQ.
   Теперь достаточно доказать, что $BQ \perp CM$. Это следует из того, что упомянутые треугольники AQB и BMC переводятся друг в друга поворотом на 90° вокруг центра квадрата.

4. *Ответ:* 11.

   Пример: для чисел 2, 3, ..., 11, очевидно, $p = 11$.

   Оценка. Докажем, что одно из чисел должно иметь простой делитель, не меньший 11. Действительно, простые числа, меньшие 11 — это 2, 3, 5 и 7. Из десяти последовательных чисел пять нечётны. Однако среди пяти последовательных нечётных чисел не более двух кратны 3, одно кратно 5 и не более одного кратного 7. Значит, по крайней мере одно из нечётных чисел не кратно ни 3, ни 5, ни 7. Поскольку оно больше 1, то должно иметь какой-то делитель, больший 7.

5. *См. рисунок в конце файла.*

   Ответ: нет, это невозможно.

   Решение. Прибрежные воды n-угольного острова состоят из n прямоугольных полос вдоль берегов и n секторов круга с радиусом 50 км.

   Заметим, что угол в каждом секторе круга равен $180^\circ - \alpha$, где α — соответствующий угол многоугольника, т.е. равен его внешнему углу. Поэтому суммарная градусная мера углов при секторах равна сумме внешних углов многоугольника, которая составляет 360° независимо от числа сторон. Таким образом, эти сектора вместе составляют круг, площадь которого постоянна.

   Суммарная площадь полос равна периметру многоугольника, умноженному на 50 км. Поэтому при равных периметрах эта площадь одинакова, а при увеличении периметра она возрастает. То же верно и для общей площади.

6. См. решение задачи 6 для 8 класса.

Задачи для 10 класса

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

2. Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?

3. Точки H, K и M лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, в котором AH является высотой. Докажите, что AH служит биссектрисой угла KHM тогда и только тогда, когда AH, BK и CM пересекаются в одной точке.

4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

5. В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

Решения задач 10 класса

1. См. решение задачи 4 для 8 класса.

2. Общее количество пятизначных чисел — $99999 - 9999 = 90000$, и среди них поровну чисел с последней цифрой 0, 1, ..., 9, то есть по 9000 чисел каждого типа.

   Обозначим через n_i, где $i = 0, 1, ..., 9$, количество чисел с последней цифрой i, кратных i. Тогда
   $n_0 = 0$ (число не может делиться на 0);
   $n_1 = 9000$ (все числа делятся на 1);
   $n_2 = 9000$ и $n_5 = 9000$ по признакам делимости на 2 и 5.

   Найдём n_3. Число $\overline{abcd3} \vdots 3$, если $\overline{abcd0} \vdots 3$, т.е. $10 \cdot \overline{abcd} \vdots 3$, а это равносильно $\overline{abcd} \vdots 3$ (поскольку 3 и 10 взаимно просты). Таким образом, надо найти количество четырёхзначных чисел, кратных тройке. Поскольку четырёхзначных чисел 9000 и из каждых трёх подряд идущих ровно одно кратно 3, то $n_3 = 9000 : 3 = 3000$.
   Аналогично n_9 равно количеству четырёхзначных чисел, кратных 9, т.е. $n_9 = 9000 : 9 = 1000$.
   Аналогично n_7 равно количеству четырёхзначных чисел, кратных 7. Наименьшее из них равно $7 \cdot 143 = 1001$, наибольшее $7 \cdot 1428 = 9996$, поэтому $n_7 = 1428 - 143 + 1 = 1286$.

   Теперь найдём n_4. Число $\overline{abcd4} \vdots 4 \Leftrightarrow 4 + 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 4 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 4 \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{abcd} \vdots 2 \Leftrightarrow \overline{abcd} \vdots 2$. Значит, n_4 равно количеству чётных четырёхзначных чисел, которое составляет половину от общего количества четырёхзначных чисел. $n_4 = 9000/2 = 4500$.

   Аналогично $\overline{abcd6} \vdots 6 \Leftrightarrow \overline{abcd0} \vdots 6 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 6 \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{abcd} \vdots 3 \Leftrightarrow \overline{abcd} \vdots 3$, так что $n_6 = 9000 : 3 = 3000$;

   $\overline{abcd8} \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{abcd0} \vdots 8 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 8 \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{abcd} \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{abcd} \vdots 4$, и $n_8 = 9000 : 4 = 2250$.

   Общее количество интересующих нас чисел равно

   $$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_9 = 0 + 9000 + 9000 + 3000 + 4500 + 9000 + 3000 + 1286 + 2250 + 1000 = 42036.$$

3. *См. рисунок в конце файла.*

   Мы будем пользоваться теоремой Чевы, которая гласит, что отрезки AH, BK и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CH}{HB}\cdot\frac{BM}{MA}=1.$$

   Введём обозначения: $\angle MHA=\alpha_1, \angle KHA=\alpha_2, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$.

   По теореме синусов для $\triangle AMH$,

$$\frac{AM}{MH}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin MAH}=\frac{\sin\alpha_1}{\cos\beta};$$

   по теореме синусов для $\triangle MHB$,

$$\frac{MH}{MB}=\frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ-\alpha_1)}=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha_1}.$$

   Поэтому

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AM}{MH}\cdot\frac{MH}{MB}=\tan\alpha_1\cdot\tan\beta.$$

   Аналогично

$$\frac{AK}{KC}=\tan\alpha_2\cdot\tan\gamma.$$

   Наконец,

$$\frac{CH}{HB}=\frac{AH\cot\gamma}{AH\cot\beta}=\frac{\cot\gamma}{\cot\beta}.$$

   Перемножим три последних равенства:

$$\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CH}{HB}\cdot\frac{BM}{MA}=\tan\alpha_2\cdot\tan\gamma\cdot\frac{\cot\gamma}{\cot\beta}\cdot\frac{1}{\tan\alpha_1\cdot\tan\beta}=\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}.$$

   Как видим, это выражение равно единице (т.е. три отрезка пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2$.

4. См. решение задачи 4 для 9 класса.

5. См. решение задачи 5 для 9 класса.

6. См. решение задачи 6 для 8 класса.

Задачи для 11 класса

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a+2015^b=2015^c+2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015}+b^{2015}$ и $c^{2015}+d^{2015}$?

2. Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?

3. Точки H, K и M лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, в котором AH является высотой. Докажите, что AH служит биссектрисой угла KHM тогда и только тогда, когда AH, BK и CM пересекаются в одной точке.

4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

5. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 1. Через точку M, лежащую на грани ABC (но не на ребре), проведены плоскости, параллельные трём другим граням. Эти плоскости делят тетраэдр на части. Найдите сумму длин рёбер той части, которая содержит точку D.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

Решения задач 11 класса

1. См. решение задачи 4 для 8 класса.

2. См. решение задачи 2 для 10 класса.

3. См. решение задачи 3 для 10 класса.

4. См. решение задачи 4 для 9 класса.

5. *См. рисунок в конце файла.*

   Заметим, что интересующая нас часть тетраэдра ограничена тремя его гранями, содержащими точку D, и тремя плоскостями, параллельными граням. Следовательно, это параллелепипед.

   Рассмотрим грани ABC и ADC. Совместим эти грани так, чтобы вершина B совпала с D, а ребро AC осталось на месте. Заметим, что линии пересечения этих граней плоскостью, проходящей через M параллельно (BCD), совпадут, поскольку они находятся на одинаковом расстоянии от CD (от BC). То же верно и для плоскости, параллельной (ABD). В результате одна из граней нашего параллелепипеда переходит в параллелограмм с диагональю BM.

   Рассуждая аналогично для двух других граней, мы видим, что три грани нашего параллелепипеда равны трём параллелограммам с вершиной M, лежащим в грани ABC. Если обозначить рёбра параллелепипеда a, b и c, то получится результат, показанный на рисунке 2. Поскольку все треугольники на этом рисунке равносторонние, то $a + b + c = 1$. Значит, сумма длин рёбер параллелепипеда равна $4a + 4b + 4c = 4$.

   Ответ: 4.

6. См. решение задачи 6 для 8 класса.

Рисунки к геометрическим задачам

Рисунок к задаче 7.3 (8.3)

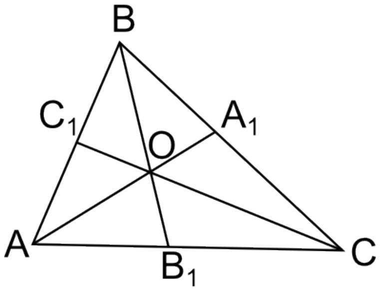


Рисунок к задаче 9.3

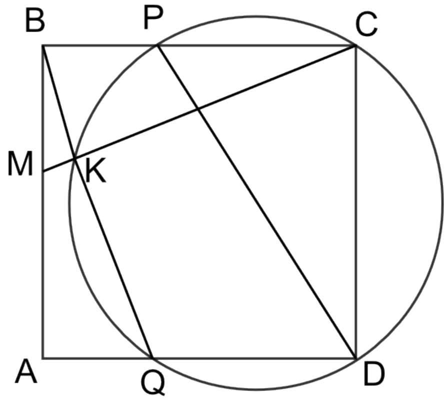
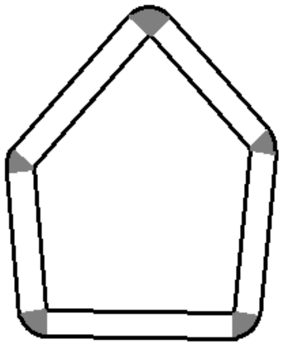


Рисунок к задаче 9.5



Рисунки к задаче 11.5

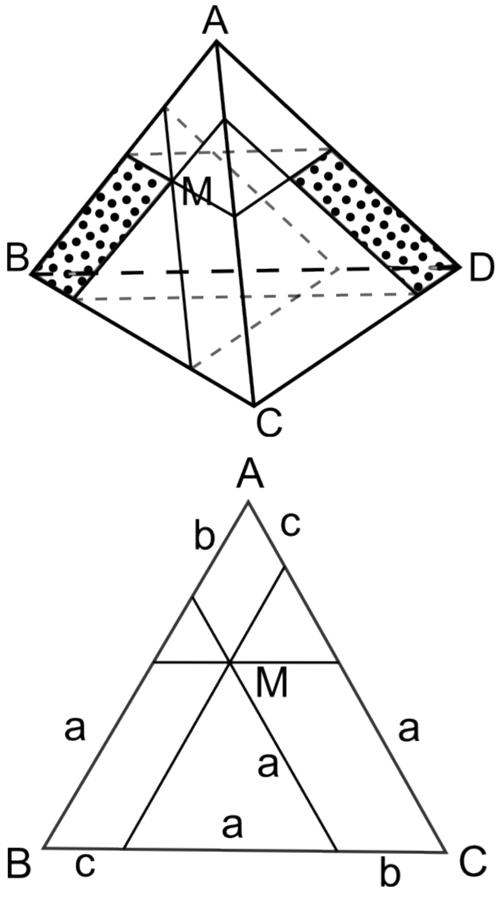


Рисунок к задаче 10.3 (11.3)