

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 5 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.
2. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
3. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиной в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.
4. На поляне на расстоянии 20 метров одна от другой растут две ели высотой по 30 метров. Ветки елей растут очень густо и среди них есть направленные точно навстречу друг другу, а длина каждой ветки вдвое меньше расстояния от неё до вершины. Паук может ползти по стволу (вверх или вниз строго по вертикали), по веткам (строго по горизонтали), либо спускаться вертикально вниз по паутине с одной ветки на другую. Какое наименьшее расстояние ему придётся проползти, чтобы добраться с вершины одной ели на вершину другой?
5. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n . Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 5 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

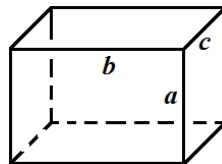
1. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.
2. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
3. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиной в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.
4. На поляне на расстоянии 20 метров одна от другой растут две ели высотой по 30 метров. Ветки елей растут очень густо и среди них есть направленные точно навстречу друг другу, а длина каждой ветки вдвое меньше расстояния от неё до вершины. Паук может ползти по стволу (вверх или вниз строго по вертикали), по веткам (строго по горизонтали), либо спускаться вертикально вниз по паутине с одной ветки на другую. Какое наименьшее расстояние ему придётся проползти, чтобы добраться с вершины одной ели на вершину другой?
5. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n . Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 6 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
2. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиной в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.
3. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n . Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?
4. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота, на рисунке обозначенные a , b и c) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.



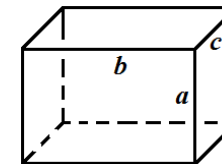
5. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 6 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
2. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиной в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.
3. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить n конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа n . Например, если было 137 конфет, то станет $137 + 1 + 3 + 7 = 148$. Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?
4. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота, на рисунке обозначенные a , b и c) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.



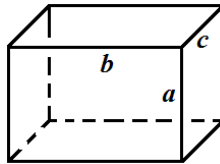
5. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 7 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.
2. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если первый прямоугольник содержит 2015 клеток, а второй — 2016.
3. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота, на рисунке обозначенные a , b и c) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.



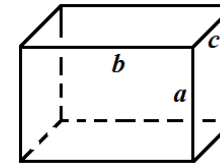
4. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
5. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Для каких n можно раскрасить доску так, чтобы на ней было ровно n равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 7 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.
2. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если первый прямоугольник содержит 2015 клеток, а второй — 2016.
3. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота, на рисунке обозначенные a , b и c) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.



4. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
5. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Для каких n можно раскрасить доску так, чтобы на ней было ровно n равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 8 класса

1. Существуют ли три таких различных цифры A, B, C , что $\overline{ABC}, \overline{CBA}, \overline{CAB}$ — квадраты натуральных чисел?
(Черта над цифрами означает число, составленное из этих цифр в указанном порядке.)
2. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Какое максимальное количество равновесных клеток может оказаться на доске? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O , причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.
4. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если каждый прямоугольник содержит больше 2010, но меньше 2020 клеток.
5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел образует сет, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры). А числа 1123, 2231, 3311 не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сколько всего сетов существует в игре?
(Перестановка чисел не приводит к образованию нового сета: 1232, 2213, 3221 и 2213, 1232, 3221 — один и тот же сет.)

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 8 класса

1. Существуют ли три таких различных цифры A, B, C , что $\overline{ABC}, \overline{CBA}, \overline{CAB}$ — квадраты натуральных чисел?
(Черта над цифрами означает число, составленное из этих цифр в указанном порядке.)
2. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Какое максимальное количество равновесных клеток может оказаться на доске? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O , причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.
4. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если каждый прямоугольник содержит больше 2010, но меньше 2020 клеток.
5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел образует сет, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры). А числа 1123, 2231, 3311 не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сколько всего сетов существует в игре?
(Перестановка чисел не приводит к образованию нового сета: 1232, 2213, 3221 и 2213, 1232, 3221 — один и тот же сет.)

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 9 класса

1. Найдите все такие числа k , для которых

$$(k/2)!(k/4) = 2016 + k^2.$$

Знаком $n!$ обозначен факториал числа n , то есть произведение всех целых чисел от 1 до n включительно (определён только для целых неотрицательных чисел; $0! = 1$).

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O , причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.
3. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
4. На координатной плоскости нарисовали равнобедренный треугольник ABC : $AB = 2016$, $BC = AC = 1533$, причём вершины A и B лежат в узлах на одной горизонтали. Определите, сколько узлов лежит в треугольнике ABC (включая узлы, лежащие на сторонах). Узлом называется точка координатной плоскости, у которой обе координаты целые.
5. На плоскости расположено 100 прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Каждый пересекается хотя бы с 90 другими. Докажите, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми.

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 9 класса

1. Найдите все такие числа k , для которых

$$(k/2)!(k/4) = 2016 + k^2.$$

Знаком $n!$ обозначен факториал числа n , то есть произведение всех целых чисел от 1 до n включительно (определён только для целых неотрицательных чисел; $0! = 1$).

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O , причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.
3. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
4. На координатной плоскости нарисовали равнобедренный треугольник ABC : $AB = 2016$, $BC = AC = 1533$, причём вершины A и B лежат в узлах на одной горизонтали. Определите, сколько узлов лежит в треугольнике ABC (включая узлы, лежащие на сторонах). Узлом называется точка координатной плоскости, у которой обе координаты целые.
5. На плоскости расположено 100 прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Каждый пересекается хотя бы с 90 другими. Докажите, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми.

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 10 класса

1. В некотором треугольнике сумма тангенсов углов оказалась равна 2016. Оцените (хотя бы с точностью до 1 градуса) величину наибольшего из его углов.
2. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.
3. Найдите все натуральные числа n , для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E , причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.
5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 10 класса

1. В некотором треугольнике сумма тангенсов углов оказалась равна 2016. Оцените (хотя бы с точностью до 1 градуса) величину наибольшего из его углов.
2. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.
3. Найдите все натуральные числа n , для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E , причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.
5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 11 класса

1. Каждая клетка доски 1000×1000 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 600000 синих равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
2. Найдите все натуральные числа n , для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.
3. В трёхмерном пространстве задана стандартная система координат. Найдите площадь множества точек удовлетворяющих следующим условиям: $x^2 + y^2 = 5$, $|x - y| < 1$, $|y - z| < 1$.
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E , причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.
5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

2015/2016 год. Второй тур

Задачи для 11 класса

1. Каждая клетка доски 1000×1000 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 600000 синих равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)
2. Найдите все натуральные числа n , для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.
3. В трёхмерном пространстве задана стандартная система координат. Найдите площадь множества точек удовлетворяющих следующим условиям: $x^2 + y^2 = 5$, $|x - y| < 1$, $|y - z| < 1$.
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E , причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.
5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?