

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה "FORMULO DE INTEGREGO"

בעיות לכיתה ו', שלב א', תשע"ה

1. בבית ספר, יום שני, הוא היום ההכי ארוך.
חודש נקרא חודש "קשה", אם יש בו חמישה ימי שני.
כמה חודשים קשים יכולים להיות בשנה?
(הערה: אפילו אם אין לימודים, ויש חופש, החודש עדיין נחשב קשה אם יש בו חמישה ימי שני.
בנוסף- מדובר בשנה לועזית בת 365 ימים, שבכל חודש יש בין 28 ל-31 ימים.)
2. יוסי כפל שני מספרים חד ספרתיים עוקבים, וקיבל מספר דו ספרתי, ששתי הספרות שלו עוקבות.
מהן כל האפשרויות עבור המספרים בתרגיל שיוסי עשה?
3. בעמוד הראשון של העיתון, שמעון מחק את כל המילים שבהן לא מופיעה האות א'.
אחרי זה הוא מחק את כל המילים שבהן לא מופיעה האות ב',
אחרי זה הוא מחק את כל המילים שבהן מופיעות האותיות א' וג' באותה מילה.
חיים גם קרא עיתון באותו בוקר, והוא מחק בעיתון שלו, בעמוד הראשון,
את כל המילים שבהן אין את האות ב', וכן יש לפחות אחת מהאותיות א' או ג' (או שתיהן).
לאחר מכן הוא מחק את כל המילים שבהן אין בו זמנית את שתי האותיות, א' ו-ג'.
האם יתכן שלשמעון נשארו יותר מילים לא מחוקות, מאשר לחיים?
4. בשכבה יש שתי כיתות. בכל אחת מהן 30 תלמידים. בכיתה הראשונה יש פי 2 יותר בניס מאשר
בכיתה השנייה, ומצד שני בכיתה השנייה יש פי 3 יותר בנות מאשר בכיתה הראשונה.
כמה בניס וכמה בנות יש בכל כיתה?
5. 3 עטים, 4 עפרונות וסרגל, עולים ביחד 26 שקלים.
5 עטים 6 עפרונות ו-3 סרגלים עולים ביחד 44 שקלים.
כמה עולים 2 עטים ו-3 עפרונות?
6. בהתחלה רשום על הלוח המספר 1.
בכל שלב, מותר לעשות אחת משתי הפעולות:
לשנות את סדר הספרות של המספר הקודם,
או לכפול את המספר הקודם פי 3.
האם באמצעות סדרה של פעולות כאלה, אפשר לקבל את המספר 999?

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה "FORMULO DE INTEGREGO"

בעיות לכיתה ז', שלב א', תשע"ה

1. בבית ספר, יום שני, הוא היום ההכי ארוך.
חודש נקרא חודש "קשה", אם יש בו חמישה ימי שני.
כמה חודשים קשים יכולים להיות בשנה?
(הערה: אפילו אם אין לימודים, ויש חופש, החודש עדיין נחשב קשה אם יש בו חמישה ימי שני.
בנוסף- מדובר בשנה לועזית בת 365 ימים, שבכל חודש יש בין 28 ל-31 ימים.)
2. יוסי כפל שני מספרים חד ספרתיים עוקבים, וקיבל מספר דו ספרתי, ששתי הספרות שלו עוקבות.
מהן כל האפשרויות עבור המספרים בתרגיל שיוסי עשה?
3. בעמוד הראשון של העיתון, שמעון מחק את כל המילים שבהן לא מופיעה האות א'.
אחרי זה הוא מחק את כל המילים שבהן לא מופיעה האות ב',
אחרי זה הוא מחק את כל המילים שבהן מופיעות האותיות א' וג' באותה מילה.
חיים גם קרא עיתון באותו בוקר, והוא מחק בעיתון שלו, בעמוד הראשון,
את כל המילים שבהן אין את האות ב', וכן יש לפחות אחת מהאותיות א' או ג' (או שתיהן).
לאחר מכן הוא מחק את כל המילים שבהן אין בו זמנית את שתי האותיות, א' ו-ג'.
האם יתכן שלשמעון נשארו יותר מילים לא מחוקות, מאשר לחיים?
4. בשכבה יש שתי כיתות. בכל אחת מהן 30 תלמידים. בכיתה הראשונה יש פי 2 יותר בניס מאשר
בכיתה השנייה, ומצד שני בכיתה השנייה יש פי 3 יותר בנות מאשר בכיתה הראשונה.
כמה בניס וכמה בנות יש בכל כיתה?
5. 3 עטים, 4 עפרונות וסרגל, עולים ביחד 26 שקלים.
5 עטים 6 עפרונות ו-3 סרגלים עולים ביחד 44 שקלים.
כמה עולים 2 עטים ו-3 עפרונות?
6. בהתחלה רשום על הלוח המספר 1.
בכל שלב, מותר לעשות אחת משתי הפעולות:
לשנות את סדר הספרות של המספר הקודם,
או לכפול את המספר הקודם פי 2.
האם באמצעות סדרה של פעולות כאלה, אפשר לקבל את המספר 209?

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה "FORMULO DE INTEGREGO"

בעיות לכיתה ח', שלב א', תשע"ה

1. בבית ספר, יום שני, הוא היום ההכי ארוך.
חודש נקרא חודש "קשה", אם יש בו חמישה ימי שני.
כמה חודשים קשים יכולים להיות בשנה?
(הערה: אפילו אם אין לימודים, ויש חופש, החודש עדיין נחשב קשה אם יש בו חמישה ימי שני.
בנוסף- מדובר בשנה לועזית בת 365 ימים, שבכל חודש יש בין 28 ל-31 ימים.)
2. יוסי כפל שני מספרים חד ספרתיים עוקבים, וקיבל מספר דו ספרתי, ששתי הספרות שלו עוקבות.
מהן כל האפשרויות עבור המספרים בתרגיל שיוסי עשה?
3. נתונים שלושה מספרים טבעיים, לא בהכרח שונים, שסכומם 100. מצאו את הערך המינימלי שיכולה לקבל הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם.
(הערה: הכפולה המשותפת הקטנה ביותר, זהו המספר ההכי קטן שמתחלק בכל אחד מהמספרים המקוריים. לדוגמא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 6 ו-4 היא 12)
4. הוכיחו, שלא משנה איך נסדר את המספרים מ-1 עד 10 במעגל, תמיד יהיה אפשר למצוא שלושה מספרים סמוכים, שסכומם לפחות 18.
5. 3 עטים, 4 עפרונות וסרגל, עולים ביחד 26 שקלים.
5 עטים 6 עפרונות ו-3 סרגלים עולים ביחד 44 שקלים.
כמה עולים 2 עטים ו-3 עפרונות?
6. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר, שמתחיל ב-11, מסתיים ב-11, ומתחלק ב-7.
הסבירו מדוע המספר שמצאתם הוא הקטן ביותר מבין אלה שמקיימים את תנאי השאלה.

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה "FORMULO DE INTEGRACO"

בעיות לכיתה ט', שלב א', תשע"ה

1. הוכיחו כי לכל מספר $N > 3$ קיים מצולע בעל N צלעות כך שאין לו אף זוג אלכסונים מקבילים.
2. במשולש ABC הנקודה K נמצאת על הצלע AC כך ש- BK הוא חוצה זווית B. כמו כן נתון כי $AB=AC$ וגם $BC=AK+BK$. מצאו את הזווית של המשולש ABC.
3. כל אחד מבין שלושת החקלאים, יכול לחרוש לבד דונם של שדה, תוך מספר שלם של ימים. אם הם יחרשו את הדונם שלושתם ביחד, אז זה יקצר להם את הזמן על פני זמן העבודה בזוגות, ב- 2,5,10 ימים בהתאמה. כלומר: אם השני עובד ביחד עם השלישי, והראשון לא עוזר להם, אז ייקח להם ביומיים יותר, מאשר הזמן שהיה לוקח לשלושתם יחד. אם הראשון עובד ביחד עם השלישי, והשני לא עוזר להם, אז ייקח להם ב- 5 ימים יותר מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. ואם הראשון עובד ביחד עם השני, ללא עזרת השלישי, אז ייקח להם ב- 10 ימים יותר, מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. כמה זמן לוקח לחקלאי שעובד הכי לאט, לחרוש את דונם השדה לבדו?
4. נתונים 15 מספרים טבעיים פריקים, שכולם לא גדולים מ- 2014. הוכיחו שאפשר לבחור מתוכם 2 מספרים כך שיהיה להם מחלק משותף גדול מ- 1.
5. נתון לוח משבצות 100×100 שממנו הורידו משבצת פינתית אחת. האם ניתן לגזור את הלוח לפי קווי הרשת ל- 33 צורות כך שלכל הצורות יהיה אותו שטח ואותו היקף?
6. אם במספר בעל 6 ספרות נשים סימן כפל אחרי שלוש ספרות ראשונות, נקבל שהמכפלה של שני המספרים התלת-ספרתיים קטנה פי 7 מהמספר המקורי. מהו המספר?
7. יש ערכה עם N^2 קלפים. על כל קלף מצד אחד רשום מספר, והצד השני ריק. כל המספרים שונים. הקלפים מסודרים בצורת ריבוע $N \times N$ עם הצד הריק כלפי מעלה. בכל תור מותר להפוך קלף. הוכיחו שבאמצעות $8N$ תורות, אפשר בוודאות למצוא קלף, שהמספר הרשום עליו קטן מכל המספרים הרשומים על השכנים שלו (שכנים הם קלפים סמוכים לפי צלע).
8. מספר טבעי נקרא "עולה" אם הספרות שלו מסודרות בסדר עולה במונח החזק. לדוגמא המספר 1589 "עולה", ואילו המספר 2447 לא. מהי הכמות המינימלית של מספרים "עולים" שצריך לחבר על מנת לקבל 2014?
9. מצאו את כל המספרים הטבעיים a, b, c שעבורם מתקיים: $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$.
10. במשולש ABC הזווית B ו- C שוות ל- 30° ול- 105° בהתאמה. הנקודה P היא אמצע הצלע BC. מצאו את הזווית BAP.

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה "FORMULO DE INTEGRACO"

בעיות לכיתה י', שלב א', תשע"ה

1. הוכיחו כי לכל מספר $3 < N$ קיים מצולע בעל N צלעות כך שאין לו אף זוג אלכסונים מקבילים.
2. נתונים שלושה מספרים טבעיים, לא בהכרח שונים, שסכומם 100. מצאו את הערך המינימלי שיכולה לקבל הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם.
3. כל אחד מבין שלושת החקלאים, יכול לחרוש לבד דונם של שדה, תוך מספר שלם של ימים. אם הם יחרשו את הדונם שלושתם ביחד, אז זה יקצר להם את הזמן על פני זמן העבודה בזוגות ב- 2, 5, 10 ימים בהתאמה. כלומר: אם השני עובד ביחד עם השלישי, והראשון לא עוזר להם, אז ייקח להם ביומיים יותר מאשר הזמן שהיה לוקח לשלושתם יחד. אם הראשון עובד ביחד עם השלישי, והשני לא עוזר להם, אז ייקח להם ב- 5 ימים יותר מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. ואם הראשון עובד ביחד עם השני, ללא עזרת השלישי, אז ייקח להם ב- 10 ימים יותר מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. כמה זמן לוקח לחקלאי שעובד הכי לאט, לחרוש את דונם השדה לבדו?
4. יוסי כפל שני מספרים עוקבים ורשם את התוצאה בבסיס כלשהו. התברר כי יצא לו מספר בעל שתי ספרות עוקבות קטנות או שוות ל-9. מצאו את הספרות האלה.
5. נתון לוח משבצות 100×100 שממנו הורידו משבצת פינתית אחת. האם ניתן לגזור את הלוח ל- 33 צורות כך שלכל הצורות יהיה אותו שטח ואותו היקף?
6. מצאו את כל המספרים הטבעיים a, b, c שעבורם מתקיים: $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$.
7. בחלק מהמשבצות של הלוח 30×30 רשום סימן פלוס או מינוס. סה"כ יש 162 פלוסים ו- 144 מינוסים על הלוח. בנוסף נתון שבכל שורה ובכל עמודה יש לכל היותר 17 סימנים. עבור כל פלוס סופרים את כמות המינוסים שנמצאים בשורה שלו. עבור כל מינוס סופרים את כמות הפלוסים שנמצאים בעמודה שלו. אז מחברים את כל המספרים האלה. מהו הערך המקסימלי של הסכום?
8. נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע AB כך שהזווית ACD שווה לזווית ABC. הנקודה S היא מרכז המעגל חוסם המשולש BCD. הנקודה E היא אמצע הקטע BD. הוכיחו כי קיים מעגל אשר עובר דרך הנקודות E, S, C, A.
9. נתונים משולשים ABC ו- $A_1B_1C_1$ כך ש- $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. מצאו את כל הערכים האפשריים אשר יכולה לקבל הגדולה מתוך שש הזוויות.
10. נתון משולש ABC ובתוכו נקודה H כך שהזווית HAB שווה לזווית HCB, ובנוסף הזווית HBC שווה לזווית HAC. הוכיחו כי H היא נקודת החיתוך של הגבהים של המשולש ABC.

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה "FORMULO DE INTEGRACO"

בעיות לכיתה י"א, שלב א', תשע"ה

1. נתון ריבוע. מצאו מרובע בעל היקף מינימלי שקודקודיו נמצאים על צלעות הריבוע כך שקודקודים שונים על צלעות שונות.

2. כל אחד מבין שלושת החקלאים, יכול לחרוש לבד דונם של שדה, תוך מספר שלם של ימים. אם הם יחרשו את הדונם שלושתם ביחד, אז זה יקצר להם את הזמן על פני זמן העבודה בזוגות ב- 2,5,10 ימים בהתאמה. כלומר: אם השני עובד ביחד עם השלישי, והראשון לא עוזר להם, אז ייקח להם ביומיים יותר מאשר הזמן שהיה לוקח לשלושתם יחד. אם הראשון עובד ביחד עם השלישי, והשני לא עוזר להם, אז ייקח להם ב- 5 ימים יותר מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. ואם הראשון עובד ביחד עם השני, ללא עזרת השלישי, אז ייקח להם ב- 10 ימים יותר מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. כמה זמן לוקח לחקלאי שעובד הכי לאט, לחרוש את דונם השדה לבדו?

3. יוסי כפל שני מספרים עוקבים ורשם את התוצאה בבסיס כלשהו. התברר כי יצא לו מספר בעל שתי ספרות עוקבות קטנות או שוות ל-9. מצאו את הספרות האלה.

4. קובי רשם 30 מספרים אשר יוצרים סדרה חשבונית עם הפרש 2061. הוכיחו כי בין המספרים האלה יש לכל היותר 20 ריבועים שלמים.

5. נתונים מספרים ממשיים x ו- y כך ש- $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$. הוכיחו כי $-\frac{1}{6} \leq x$.

6. מצאו את כל הפתרונות השלמים של מערכת המשוואות

$$2^a + 3^b = 5^b$$

$$3^a + 6^b = 9^b$$

7. מרים צובעת לוח משבצות 10×10 אשר כולו לבן בהתחלה. היא יכולה לצבוע עמודה כלשהי בכחול או שורה כלשהי באדום (כל אחת מעמודות ושורות ניתן לצבוע לכל היותר פעם אחת). אם היא צובעת בכחול משבצת שהיתה אדומה, אז המשבצת הופכת לכחולה. אבל אם היא צובעת באדום משבצת שהיתה כחולה, אז מתרחשת תגובה כימית בין הצבעים והמשבצת הופכת ללבנה. האם יתכן שבסופו של דבר על הלוח יהיו 33 משבצות אדומות?

8. נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע AB כך שהזווית ACD שווה לזווית ABC. הנקודה S היא מרכזו המעגל חוסם המשולש BCD. הנקודה E היא אמצע הקטע BD. הוכיחו כי קיים מעגל אשר עובר דרך הנקודות E, S, C, A.

9. נתונים משולשים ABC ו- $A_1B_1C_1$ כך ש- $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. מצאו את כל הערכים האפשריים אשר יכולה לקבל הגדולה מתוך שש הזוויות.

10. מצאו את כל הזוגות של המספרים הראשוניים p ו- q אשר מקיימים את המשוואה

$$100q + 80 = p^3 + q^2$$

אולימפיאדה בינלאומית במתמטיקה "FORMULO DE INTEGRACO"

בעיות לכיתה י"ב, שלב א', תשע"ה

1. כל אחד מבין שלושת החקלאים, יכול לחרוש לבד דונם של שדה, תוך מספר שלם של ימים. אם הם יחרשו את הדונם שלושתם ביחד, אז זה יקצר להם את הזמן על פני זמן העבודה בזוגות ב- 2,5,10 ימים בהתאמה. כלומר: אם השני עובד ביחד עם השלישי, והראשון לא עוזר להם, אז ייקח להם ביומיים יותר מאשר הזמן שהיה לוקח לשלושתם יחד. אם הראשון עובד ביחד עם השלישי, והשני לא עוזר להם, אז ייקח להם ב- 5 ימים יותר מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. ואם הראשון עובד ביחד עם השני, ללא עזרת השלישי, אז ייקח להם ב- 10 ימים יותר מאשר זמן העבודה של שלושתם יחד. כמה זמן לוקח לחקלאי שעובד הכי לאט, לחרוש את דונם השדה לבדו?

2. יוסי כפל שני מספרים עוקבים ורשם את התוצאה בבסיס כלשהו. התברר כי יצא לו מספר בעל שתי ספרות עוקבות קטנות או שוות ל-9. מצאו את הספרות האלה.

3. קובי רשם 30 מספרים אשר יוצרים סדרה חשבונית עם הפרש 2061. הוכיחו כי בין המספרים האלה יש לכל היותר 20 ריבועים שלמים.

4. נתונים מספרים ממשיים x ו- y כך ש- $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$. הוכיחו כי $-\frac{1}{6} \leq x$.

5. מרים צובעת לוח משבצות 10×10 אשר כולו לבן בהתחלה. היא יכולה לצבוע עמודה כלשהי בכחול או שורה כלשהי באדום (כל אחת מעמודות ושורות ניתן לצבוע לכל היותר פעם אחת). אם היא צובעת בכחול משבצת שהיתה אדומה, אז המשבצת הופכת לכחולה. אבל אם היא צובעת באדום משבצת שהיתה כחולה, אז מתרחשת תגובה כימית בין הצבעים והמשבצת הופכת ללבנה. האם יתכן שבסופו של דבר על הלוח יהיו 33 משבצות אדומות?

6. האם נכון כי עבור כל $1 < a$ מתקיים $\sqrt{6} \leq \log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a}$?

7. הוכיחו כי מספר האופנים לגזור מלבן 200×3 לדומינו (מלבנים 1×2) מתחלק ב-3.

8. באופן אקראי נבחרים 3 מספרים, לא בהכרח שונים, מ-1 עד N ונרשמים בסדר עולה (כלומר כך שהמספר הבא יהיה גדול או שווה לקודם). מהי ההסתברות שמתקבלת סדרה חשבונית?

9. נתונים משולשים ABC ו- $A_1B_1C_1$ כך ש- $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. מצאו את כל הערכים האפשריים אשר יכולה לקבל הגדולה מתוך שש הזוויות.

10. עבור מספר טבעי k נסמן ב- $d(k)$ את מספר המחלקים שלו. הוכיחו כי לכל n טבעי המספר

$$d(1) + d(2) + \dots + d(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

מסמן את החלק השלם של מספר ממשי x .