

## 5 კლასი

1. თვეს დავარქვავთ „მძიმე“, თუ მასში 5 ორშაბათია. რამდენი „მძიმე“ თვე შეიძლება იყოს წლის განმავლობაში?
2. ანდრომ გადაამრავლა ორი მიმდევრობითი ციფრი და მიიღო ორნიშნა რიცხვი, რომელიც ჩაიწერა ორი მიმდევრობითი ციფრით. იპოვეთ ყველა ასეთი მაგალითი.
3. სანდრომ სახელმძღვანელოს 25-ე გვერდზე გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის ასო-ბგერა „ა“. მერე მან გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის ასო-ბგერა „ბ“. მერე მან იპოვა ყველა სიტყვა, რომელშიც არის „ო“-ც და „ა“-ც და ისინიც გადაშალა. კოტემ თავისი სახელმძღვანელოს იგივე გვერდზე გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის ასო-ბგერა „ბ“, მაგრამ არის „ა“ ან „ო“ (ან ორივე ერთად). მერე მან გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის არც „ა“, არც „ო“. შესაძლებელია თუ არა, რომ სანდროს დარჩა უფრო მეტი წაშლელი სიტყვა, ვიდრე კოტეს?
4. 2 კლასიდან თითოეულში 30-30 მოსწავლეა. პირველ კლასში ორჯერ მეტი ბიჭია, ვიდრე მეორეში, ხოლო გოგოები პირველ კლასში სამჯერ ნაკლებია, ვიდრე მეორეში. რამდენი ბიჭი და რამდენი გოგოა თითოეულ კლასში?
5. 3 კალამი, 4 ფანქარი და სახაზავი ერთად 26 ლარი ღირს, ხოლო 5 კალამი, 6 ფანქარი და 3 სახაზავი ერთად 44 ლარი ღირს. რა ღირს ერთად 2 კალამი და 3 ფანქარი?
6. დაფაზე დაწერეს რიცხვი 1. დაფაზე დაწერილი რიცხვი შეიძლება გაამრავლო 3-ზე ან გადაადგილო მასში ციფრები და მიიღო ახალი რიცხვი. შეიძლება თუ არა ასეთი წესით მივიღოთ რიცხვი 999?

## 6 კლასი

1. თვეს დავარქვავთ „მძიმე“, თუ მასში 5 ორშაბათია. რამდენი „მძიმე“ თვე შეიძლება იყოს წლის განმავლობაში?
2. ანდრომ გადაამრავლა ორი მიმდევრობითი ციფრი და მიიღო ორნიშნა რიცხვი, რომელიც ჩაიწერა ორი მიმდევრობითი ციფრით. იპოვეთ ყველა ასეთი მაგალითი.
3. სანდრომ სახელმძღვანელოს 25-ე გვერდზე გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის ასო-ბგერა „ა“. მერე მან გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის ასო-ბგერა „ბ“. მერე მან იპოვა ყველა სიტყვა, რომელშიც არის „ო“-ც და „ა“-ც და ისინიც გადაშალა. კოტემ თავისი სახელმძღვანელოს იგივე გვერდზე გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის ასო-ბგერა „ბ“, მაგრამ არის „ა“ ან „ო“ (ან ორივე ერთად). მერე მან გადაშალა ყველა სიტყვა, რომელშიც არ არის არც „ა“, არც „ო“. შესაძლებელია თუ არა, რომ სანდროს დარჩა უფრო მეტი წაუშლელი სიტყვა, ვიდრე კოტეს?
4. 2 კლასიდან თითოეულში 30-30 მოსწავლეა. პირველ კლასში ორჯერ მეტი ბიჭია, ვიდრე მეორეში, ხოლო გოგოები პირველ კლასში სამჯერ ნაკლებია, ვიდრე მეორეში. რამდენი ბიჭი და რამდენი გოგოა თითოეულ კლასში?
5. 3 კალამი, 4 ფანქარი და სახაზავი ერთად 26 ლარი ღირს, ხოლო 5 კალამი, 6 ფანქარი და 3 სახაზავი ერთად 44 ლარი ღირს. რა ღირს ერთად 2 კალამი და 3 ფანქარი?
6. დაფაზე დაწერეს რიცხვი 1. დაფაზე დაწერილი რიცხვი შეიძლება გაამრავლო 2-ზე ან გადაადგილო მასში ციფრები და მიიღო ახალი რიცხვი. შეიძლება თუ არა ასეთი წესით მივიღოთ რიცხვი 209?

## 7 კლასი

1. თვეს დავარქვათ „მძიმე“, თუ მასში 5 ორშაბათია. რამდენი „მძიმე“ თვე შეიძლება იყოს წლის განმავლობაში?
2. ანდრომ გადაამრავლა ორი მიმდევრობითი ციფრი და მიიღო ორნიშნა რიცხვი, რომელიც ჩაიწერა ორი მიმდევრობითი ციფრით. იპოვეთ ყველა ასეთი მაგალითი.
3. სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი 100-ს ტოლია. რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ამ რიცხვების უმცირესმა საერთო ჯერადმა?
4. რიცხვები 1,2, ..., 10 განლაგებულია წრეზე. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი განლაგების შემთხვევაში მოიძებნება 3 მეზობელი რიცხვი არანაკლები 18-ს ჯამით.
5. 3 კალამი, 4 ფანქარი და სახაზავი ერთად 26 ლარი ღირს, ხოლო 5 კალამი, 6 ფანქარი და 3 სახაზავი ერთად 44 ლარი ღირს. რა ღირს ერთად 2 კალამი და 3 ფანქარი?
6. იპოვეთ უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლის ჩანაწერი იწყება 11-ით, მთავრდება 11-ით და იყოფა 7-ზე. დაასაბუთეთ, რატომ არის ეს რიცხვი უმცირესი.

## 8 კლასი

1. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი  $n > 3$  არსებობს  $n$ -კუთხედი, რომელშიც დიაგონალების არცერთი წყვილი არ იქნება პარალელური.
2. BK არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. ცნობილია, რომ  $AB = AC$  და  $BC = AK + BK$ . იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები.
3. სამი მუშიდან თითოეულს შეუძლია ორმოს ამოთხრას დღეების მთელ რაოდენობაში. თუ სამივე ერთად იმუშავენ, ისინი ამოთხრიან ორმოს 2 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე მეორე და მესამე ერთად, 5 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მესამე ერთად და 10 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მეორე ერთად. რამდენ დღეს მოანდომებს ორმოს ამოთხრას ყველაზე ნელი მათ შორის?
4. მოცემულია 15 შედგენილი რიცხვი, თითოეული 2014-ს არ აღემატება. დაამტკიცეთ, რომ ამ რიცხვებიდან რომელიმე ორს აქვს 1-ზე დიდი საერთო გამყოფი.
5. მოცემულია კვადრეტი  $100 \times 100$ , რომელსაც აკლია კუთხის უჯრედი. შეიძლება თუ არა ეს კვადრეტი გაიჭრას უჯრედებად 33 ფიგურად ისე, რომ მათ ჰქონდეთ ტოლი ფართობიც და პერიმეტრიც?
6. 6-ნიშნა რიცხვში პირველი 3 ციფრის შემდეგ დასვეს გამრავლების ნიშანი და აღმოჩნდა, რომ მიღებული ორი 3-ნიშნა რიცხვის ნამრავლი 7-ჯერ ნაკლებია საწყის რიცხვზე. იპოვეთ საწყისი რიცხვი.
7. გვაქვს კომპექტი  $N^2$  ბარათისაგან, რომლებზეც ერთი მხრიდან ჩაწერილია რიცხვი, ხოლო მეორე მხარე ცარიელია. ყველა რიცხვი წყვილ-წყვილად სხვადასხვაა. ეს ბარათები დაწყობილია მაგიდაზე კვადრატად  $N \times N$  ცარიელი მხარით ზემოთ. შეიძლება ნებისმიერი ბარათის ამოტრიალება და ამით გაგება, რა რიცხვი აწერია მას. დაამტკიცეთ, რომ ყველაზე მეტი  $8N$  გადატრიალებით შეიძლება ვიპოვოთ ბარათი, რომელზეც ჩაწერილი რიცხვი იქნება ნაკლები, ვიდრე ორ მეზობელ ბარათზე იგივე სტრიქონში.
8. დავარქვათ ნატურალური რიცხვი „ზრდადი“, თუ ციფრები მის ჩაწერაში მკაცრად იზრდება (მაგ., 7 და 1589 „ზრდადია“, ხოლო 2447 - არა). „ზრდადი“ რიცხვების რა უმცირესი რაოდენობა უნდა შევაჯამოთ, რომ მივიღოთ 2014?
9. იპოვეთ ყველა ნატურალური  $a$ ,  $b$  და  $c$ , რომ  $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$ .
10. ABC სამკუთხედში B და C კუთხეები  $30^\circ$  და  $105^\circ$ , ხოლო P – BC გვერდის შუაწერტილია. იპოვეთ BAP კუთხე.

## 9 კლასი

1. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი  $n > 3$  არსებობს  $n$ -კუთხედი, რომელშიც დიაგონალების არცერთი წყვილი არ იქნება პარალელური.
2. სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი 100-ს ტოლია. რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ამ რიცხვების უმცირესმა საერთო ჯერადმა?
3. სამი მუშიდან თითოეულს შეუძლია ორმოს ამოთხრას დღეების მთელ რაოდენობაში. თუ სამივე ერთად იმუშავენ, ისინი ამოთხრიან ორმოს 2 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე მეორე და მესამე ერთად, 5 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მესამე ერთად და 10 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მეორე ერთად. რამდენ დღეს მოანდომებს ორმოს ამოთხრას ყველაზე ნელი მათ შორის?
4. ანდრომ გადაამრავლა ორი მიმდევრობითი ციფრი და რომელიღაც ათვლის სიტემაში მიიღო ორნიშნა რიცხვი, რომელიც ჩაიწერა ორი მიმდევრობითი ციფრით (ციფრები არ აღემატება 9-ს). იპოვეთ ეს ციფრები.
5. მოცემულია კვადრეტი  $100 \times 100$ , რომელსაც აკლია კუთხის უჯრედი. შეიძლება თუ არა ეს კვადრეტი გაიჭრას 33 ფიგურად ისე, რომ მათ ჰქონდეთ ტოლი ფართობიც და პერიმეტრიც?
6. იპოვეთ ყველა ნატურალური  $a$ ,  $b$  და  $c$ , რომ  $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$ .
7. ცხრილში  $30 \times 30$  დასმულია 162 „+“ და 144 „-“ (თითოეულ უჯრაში არაუმეტეს ერთი ნიშნისა) ისე, რომ ცხრილის თითოეულ სტრიქონსა და სვეტში არის არაუმეტეს 17 ნიშნისა. ყოველივე „+“-თვის დათვალეს „-“-ს რაოდენობა ამ სტრიქონში, ყოველივე „-“-თვის დათვალეს „+“-ს რაოდენობა ამ სვეტში. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ამ დათვლილი რიცხვების ჯამმა?
8.  $ABC$  სამკუთხედში  $AB$  გვერდზე აღებულია  $D$  წერტილი ისე, რომ კუთხეები  $ACD$  და  $ABC$  ტოლია.  $BCD$  სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი  $S$  წერტილია. დაამტკიცეთ, რომ  $A$ ,  $C$ ,  $S$  და  $BD$ -ს შუაწერტილი მდებარეობს ერთ წრეწირზე.
9.  $ABC$  და  $A_1B_1C_1$  ისეთი სამკუთხედებია, რომ  $\sin A = \cos A_1$ ,  $\sin B = \cos B_1$ ,  $\sin C = \cos C_1$ . რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს უდიდესმა ამ 6 კუთხეს შორის?
10.  $ABC$  სამკუთხედის შიგნით აღებულია  $H$  წერტილი ისე, რომ კუთხეები  $HAB$  და  $HCB$  ტოლია და კუთხეები  $HBC$  და  $HAC$  ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ  $H$  წერტილი არის  $ABC$  სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი.

## 10 კლასი

- კვადრატის თითოეულ გვერდზე აირჩიეთ თითო წერტილი ისე, რომ ამ წერტილებით შექმნილ ოთხკუთხედს ჰქონდეს უმცირესი პერიმეტრი.
- სამი მუშიდან თითოეულს შეუძლია ორმოს ამოთხრა დღეების მთელ რაოდენობაში. თუ სამივე ერთად იმუშავენ, ისინი ამოთხრიან ორმოს 2 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე მეორე და მესამე ერთად, 5 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მესამე ერთად და 10 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მეორე ერთად. რამდენ დღეს მოანდომებს ორმოს ამოთხრას ყველაზე ნელი მათ შორის?
- ანდრომ გადაამრავლა ორი მიმდევრობითი ციფრი და რომელიღაც ათვლის სიტემაში მიიღო ორნიშნა რიცხვი, რომელიც ჩაიწერა ორი მიმდევრობითი ციფრით (ციფრები არ აღემატება 9-ს). იპოვეთ ეს ციფრები.
- კოტემ ამოწერა დაფაზე არითმეტიკული პროგრესიის 30 მიმდევრობითი წევრი. პროგრესიის სხვაობა 2061-ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ამ პროგრესიაში არის არაუმეტეს 20 ზუსტი კვადრატისა.
- ნამდვილი  $x$  და  $y$  რიცხვები ისეთია, რომ  $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$ . დაამტკიცეთ, რომ  $x \geq -1/6$ .
- ამოხსენით განტოლებათა სისტემა მთელ რიცხვებში
$$\begin{aligned}2^a + 3^b &= 5^b \\3^a + 6^b &= 9^b\end{aligned}$$
- მარი ღებავს თეთრ დაფას ზომით  $10 \times 10$ . მას შეუძლია შეღებოს ვერტიკალური რიგი ლურჯი საღებავით ან ჰორიზონტალური რიგი წითელი საღებავით (თითოეული რიგი შეიძლება შეიღებოს არაუმეტეს ერთხელ). თუ ლურჯი საღებავი დაიდება წითელზე, უჯრა ხდება ლურჯი, ხოლო თუ წითელი დაიდება ლურჯზე, უჯრა ხდება ისეც თეთრი. შეიძლება თუ არა დაფაზე აღმოჩნდეს 33 წითელი უჯრა?
- ABC სამკუთხედში AB გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ კუთხეები ACD და ABC ტოლია. BCD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი S წერტილია. დაამტკიცეთ, რომ A, C, S და BD-ს შუაწერტილი მდებარეობს ერთ წრეწირზე.
- ABC და  $A_1B_1C_1$  ისეთი სამკუთხედებია, რომ  $\sin A = \cos A_1$ ,  $\sin B = \cos B_1$ ,  $\sin C = \cos C_1$ . რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს უდიდესმა ამ 6 კუთხეს შორის?
- ამოხსენით განტოლება მარტივ რიცხვებში:  $100q + 80 = p^3 + q^2$

## 11 კლასი

1. სამი მუშიდან თითოეულს შეუძლია ორმოს ამოთხრა დღეების მთელ რაოდენობაში. თუ სამივე ერთად იმუშავენ, ისინი ამოთხრიან ორმოს 2 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე მეორე და მესამე ერთად, 5 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მესამე ერთად და 10 დღის უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი და მეორე ერთად. რამდენ დღეს მოანდომებს ორმოს ამოთხრას ყველაზე ნელი მათ შორის?
2. ანდრომ გადაამრავლა ორი მიმდევრობითი ციფრი და რომელიღაც ათვლის სიტემაში მიიღო ორნიშნა რიცხვი, რომელიც ჩაიწერა ორი მიმდევრობითი ციფრით (ციფრები არ აღემატება 9-ს). იპოვეთ ეს ციფრები.
3. კოტემ ამოწერა დაფაზე არითმეტიკული პროგრესიის 30 მიმდევრობითი წევრი. პროგრესიის სხვაობა 2061-ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ამ პროგრესიაში არის არაუმეტესი 20 ზუსტი კვადრატისა.
4. ნამდვილი  $x$  და  $y$  რიცხვები ისეთია, რომ  $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$ . დაამტკიცეთ, რომ  $x \geq -1/6$ .
5. მარი ღებავს თეთრ დაფას ზომით  $10 \times 10$ . მას შეუძლია შეღებოს ვერტიკალური რიგი ლურჯი საღებავით ან ჰორიზონტალური რიგი წითელი საღებავით (თითოეული რიგი შეიძლება შეიღებოს არაუმეტეს ერთხელ). თუ ლურჯი საღებავი დაიდება წითელზე, უჯრა ხდება ლურჯი, ხოლო თუ წითელი დაიდება ლურჯზე, უჯრა ხდება ისეც თეთრი. შეიძლება თუ არა დაფაზე აღმოჩნდეს 33 წითელი უჯრა?
6. შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ  $\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1} \sqrt{a} \geq \sqrt{6}$ , თუ  $a > 1$ ?
7. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის  $200 \times 31 \times 2$ -ზე მართკუთხედებზე გაჭრის ხერხების რაოდენობა იყოფა 3-ზე.
8. შემთხვევითი წესით რიცხვებიდან 1-დან  $N$ -მდე (ორივეს ჩათვლით) ირჩევენ სამ რიცხვს (შეიძლება, ისინი ემთხვეოდეს) და ალაგებენ ზრდადობის მიხედვით. რა ალბათობით შეადგენენ ისინი არითმეტიკულ პროგრესიას?
9.  $ABC$  და  $A_1B_1C_1$  ისეთი სამკუთხედებია, რომ  $\sin A = \cos A_1$ ,  $\sin B = \cos B_1$ ,  $\sin C = \cos C_1$ . რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს უდიდესმა ამ 6 კუთხეს შორის?
10. ვთქვათ,  $d(k)$  - ნატურალური  $k$  რიცხვის გამყოფების რაოდენობაა. დაამტკიცეთ, რომ  $d(1) + d(2) + \dots + d(n)$ -ს და  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ -ს, სადაც კვადრატული ფრჩილები ნიშნავს რიცხვის მთელ ნაწილს, აქვთ ერთი და იგივე ლუწობა.