

N1

Приведите пять различных натуральных чисел,
произведение которых равно 1000

Решение

Разложим 1000 на простые множители

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

Найдем все множители, получим:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25 = 1000$$

1) Очевидно, что равновесными не могут быть клетки, которые находятся по краю доски, кроме угловых, т.к. они имеют по 3-е соседней походами на рисунке крестиком.

2) Считаем $N = 100^2 - 98 \cdot 4 = 9608$ $\times 98$
клеток могут быть равновесными, $\frac{98}{392}$
вероятно походами на рисунке.

3) Показано все остальные $N \leq 9608$ или такие подпадают

1. Сначала посчитаем измения цвета у угловых клеток, при каждой измении цвета только одна из этих равновесных клеток перестает быть таковой. Значит $9604 \leq N < 9608$ также удовлетворено условием.

2. Далее измения цвет по очереди у угловых клеток доски, которые не были равновесными мы при каждой измении цвета, сможем убавить равновесности у одной клетки по очереди.

3. Когда закончатся граничные клетки можно нарушить порядок и стабильность у доски обрезать и ввести задачу к алгоритму только будет $98 \cdot 98$. У которого $N_{max} = \frac{98 \cdot 98}{4} = 2401$. И продолжим рассуждения пока не добьемся доски 2-2.

$$\begin{array}{r} \times 98 \\ 98 \\ \hline 980 \\ 9702 \\ \hline 9702 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 98 \\ 98 \\ \hline 980 \\ 9702 \\ \hline 9702 \end{array}$$

4. На доске 2-2 мы можем оставить равновесными как одну клетку, так и вообще не одну. Значит для доски $100 \cdot 100$ $N \leq 9608$

N2

На тетрадном листе отведены два прямоугольника.
У первого прямоугольника вертикальная сторона
короче горизонтальной, а у второго - наоборот.
Найдите максимально возможную площадь их
общей части, если первый прямоугольник
содержит 2015 клеток, а второй - 2016

Решение

Возьмем на простом листе бумаги
прямоугольники

2015	5	2016	2
403	13	1008	2
31	31	504	2
1		252	2
		126	2
		63	3
		27	3
		7	7

Очевидно, что площадь прямоугольников будет максимальной, когда максимальны короткие стороны прямоугольников. Из комбинации простых множителей найдем максимальные короткие стороны, это будет:

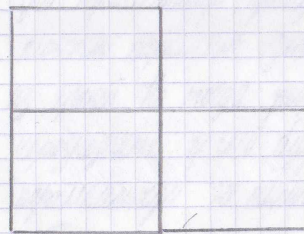
$$a_1 = 31$$

$$a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

$$S_{\max} = 31 \cdot 42 = 1302$$

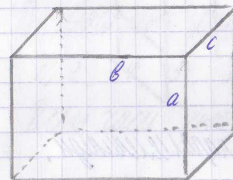
$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 42 \\ \hline 62 \\ 124 \\ \hline 1302 \end{array}$$

Ответ: 1302 клетки



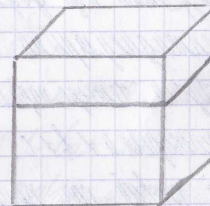
N3

Назовем типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота, на рисунке обозначены a , b , и c) равны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.



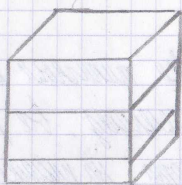
Решение

1) Куб можно разрезать на два параллелепипеда, проведя плоскость параллельно одной из граней. Но тогда грани пересеченной грани будут равны. Значит параллелепипеды не типичны.

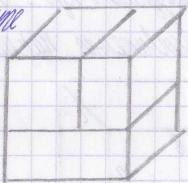


2) При параллелепипеда из куба можно получить другим способом

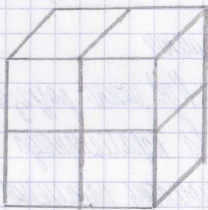
1. Проведем две параллельные плоскости относительно одной из граней все три параллелепипеда соответствуют пункту 1 и не таковы.



2. Разделим куб как в пункте 1 и еще один параллелепипед еще на два. В итоге получим два типичных и один нетипичный параллелепипед.



- 3) Разделим куб двумя перпендикулярными. В итоге получим четыре параллелепипеда. У которых $a \neq b \neq c$. Так как первый раз получили все нетипичные параллелепипеды, и знаем максимальное кол-во - четыре типичных параллелепипеда.



N4

Рациональное число называется ладным, если ни один из цифр в его записи не делится 3. Найдите сумму цифр всех рациональных чисел, которые являются ладными.

Решение

В ладных ладных числах могут быть цифры: 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8; цифры могут повторяться. Всего чисел, которые являются ладными $6 \cdot 7^4 = 14406$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 343 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 343 \\ 2401 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 2401 \\ 14406 \\ \hline \end{array}$$

чисел, у которых на первом месте 8. Знают сумму 8 - которые были на 1-вом месте $8 \cdot 7^4$, аналогично кол-во раз на первом месте могут быть остальные цифры, тогда сумма цифр на первом месте:

$$\Sigma = 7^4 \cdot (1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8) = 7^4 \cdot 27$$

Аналогично суммы 2-го, 3-го, 4-го, 5-го мест

$$\Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_4 = \Sigma_5 = 6 \cdot 7^3 \cdot (1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8) =$$

$$= 6 \cdot 27 \cdot 7^3$$

$$\Sigma = 127 \cdot 7 + 27 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7^3 = 27 \cdot 31 \cdot 7^3 = 287091$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 31 \\ \hline 27 \\ 837 \\ \hline 837 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 343 \\ 837 \\ \hline 2401 \\ 1029 \\ \hline 287091 \end{array}$$

Ответ: 287091

N5

Каждая клетка доски 100×100 окрашена в синий или белый цвет. Можно ли клетку покрасить, если среди ее соседей по ребру синих и белых. Для каких n можно покрасить доску так, чтобы на ней были только n покрашенных клеток?

Решение

