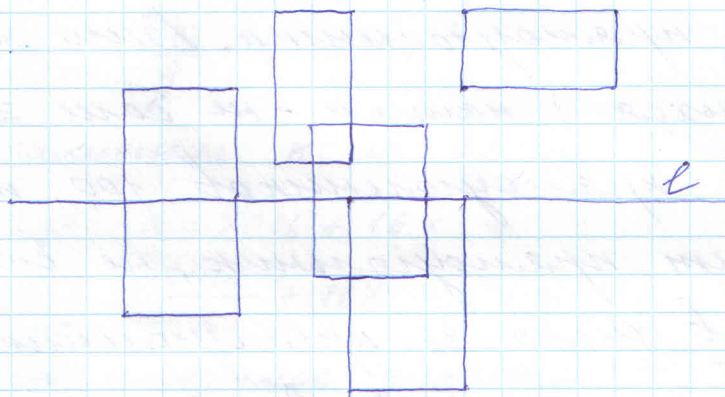


№5



Рассмотрим самую нижнюю из всех верхних сторон прямоугольников. Прямую, на которой лежит эта сторона обозначим через e . Прямоугольников, лежащих целиком выше e , не более, чем 9, так как каждый прямоугольник не пересекается не более, чем с 9. Если мы проведем прямую через нижнюю сторону выбранного нами, то получим не более 9 прямоугольников, не пересекающихся с выбранным. Еще по 9 прямоугольников слева и справа от прямой, содержа-

щих левую и правую стороны выбранного прямоугольника. Всего пересекающихся с нашим - не более 36.

Так как прямоугольников 100, то существует прямоугольник, не входящий в число 36 прямоугольников.

Этот прямоугольник A пересекается со всеми прямоугольниками. В самом деле, пусть с ним не пересекается какой-то прямоугольник P . Тогда какая-то вертикальная или горизонтальная прямая разделяет прямоугольники A и P . Если, например, она горизонтальная, и прямоугольник A лежит выше нее, то верхняя граница прямоугольника P лежит ниже нижней границы A , что невозможно. Аналогично, невозможны другие случаи.

№1

$$\left(\frac{k}{2}\right)! \cdot \frac{k}{4} = 2016 + k^2$$

Заметим k на $4x$

$$(2x)! \cdot x = 2016 + 16x^2$$

$$(2x)! = \frac{2016}{x} + 16x$$

Максимальное значение $\frac{2016}{x} + 16x$ это

32257, при этом $x=2016$. Больше, чем

2016 брать нельзя, иначе правая часть будет дробной, в то время как левая — целой.

Нам известно, что $8! = 40320 \Rightarrow$

$$x < 4.$$

Допустим $x=1$

$$2 = 2016 + 16 - \text{неверно}$$

Допустим $x=2$

$$24 = 1008 + 16 \cdot 2 - \text{неверно}$$

Допустим $x=3$

$$720 = 672 + 48 - \text{верно}$$

$$k = 4x = 12$$

Ответ: 12

№3

Возможные цифры в записи:

1; 2; 4; 5; 7; 8

Всего таких пятизначных чисел 6^5

Заметим, что каждому числу соответствует другое число. Например:

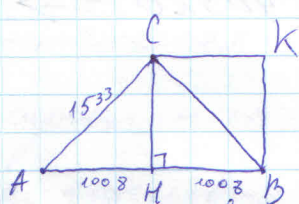
11111 и 88888; 12457 и 87547

Сумма цифр в записи равна 45

Всего таких сумм $\frac{6^5}{2} \Rightarrow$ общая

сумма равна $45 \cdot \frac{6^5}{2} = 174960$

Ответ: 174960



№4

Вспустим высоту CH. По теореме Пифагора

$$CH^2 = 1533^2 - 1008^2 = 1334025$$

$$CH = 1155$$

Достроим $\triangle CHB$ до прямоугольника

$$CHBK. S_{\triangle CHB} = S_{\square CHBK}$$

$$S_{\triangle CHB} = 2016 \cdot 1155 = 2328480$$

$$S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1 \text{ (формула Эйлера)}$$

$$\Gamma = 1009 + 1155 + 1008 + 1154 = 4326$$

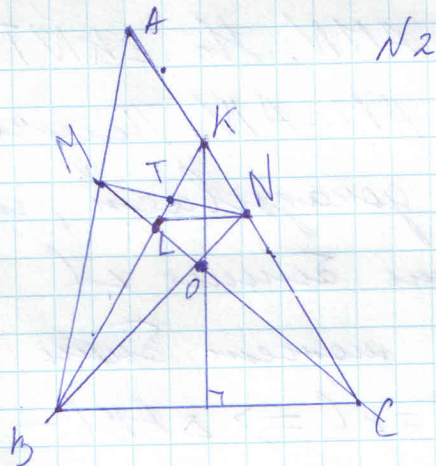
$$2328480 = B + 2163 - 1$$

$$2328481 = B + 2163$$

$$B = 2326318$$

$$B + \Gamma = 2326318 + 4326 = 2330644$$

Ответ: 2330644



Допустим, что $\triangle ABC$ не является равнобедренным. Пусть $\angle B$ больше $\angle C$.

Построим на стороне AC точку K такую, что $BK = CK$. Пусть L и T — точки пересечения прямой BK с CM и MN соответственно. Так как $\triangle BKC$ — равнобедренный и $BO = OC$, то KO —

ось симметрии $\triangle BKC$. Точки L и N симметричны относительно прямой KO
 $\Rightarrow \angle KLN = \angle KNL$.

$\angle KNT$ меньше $\angle KNL$

$\angle KNL = \angle KLN$

$\angle KLN$ меньше $\angle KTN$

$\angle KTN = \angle BTM$

$\angle BTM$ меньше $\angle AMN$. Но $\angle KNT = \angle AMN$, так как $AM = AN$. Получен-

ное противоречие доказывает, что $\angle B$ не может быть больше $\angle C$.

Аналогично $\angle B$ не может быть меньше $\angle C \Rightarrow \angle B = \angle C \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный.