№4.

Дано:

ABCD - выпуклый 4х-угольник.

$\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$

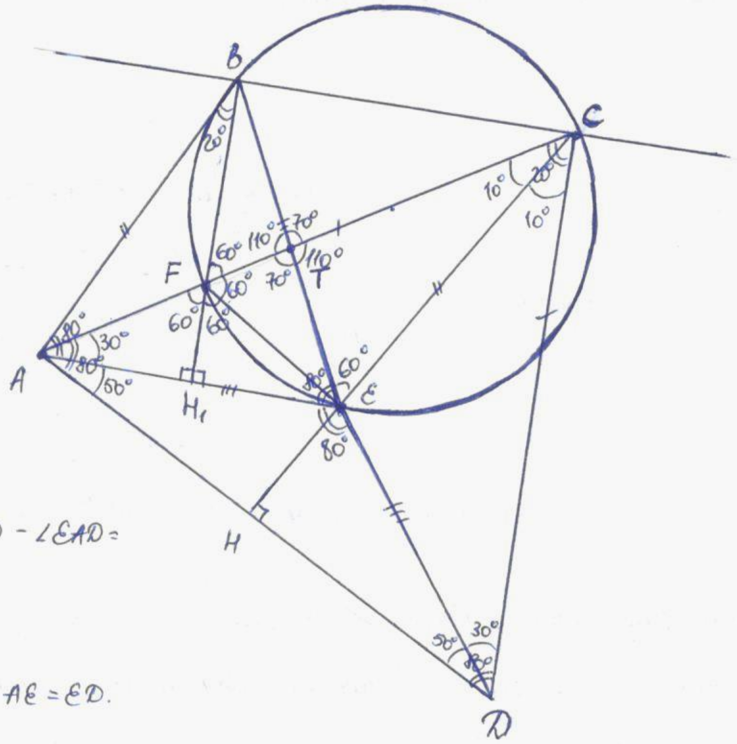
$\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$

$\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$

Док-ть:

$\triangle BEC$ - равносторонний

Решение:



Обозначим $AC \cap BE = T$.

В $\triangle TAE$: $\angle TAE = \angle TAD - \angle EAD = \angle CAD - \angle EAD = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$

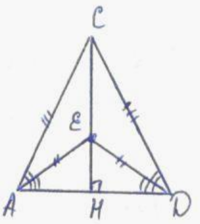
$\angle ATE = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$

Из условия $\Rightarrow$ $AB = BE$; $AC = CD$; $AE = ED$.

В $\triangle ABE$: $\angle ABE = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$

В $\triangle AED$: $\angle AED = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$

В $\triangle ACD$: $\angle ACD = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$



AC - диагональ; $\angle ATE + \angle ETC = 180^\circ \Rightarrow \angle ETC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\triangle ACD$ - равноб.; $\triangle AED$ - равноб.; AD - общая сторона.

$\triangle AED$ лежит внутри $\triangle ACD \Rightarrow$ А т.к. вершины всех равноб. $\triangle$ков лежат на одной прямой, то проведя высоту CH в $\triangle ACD$ мы получим, что она же является высотой в $\triangle AED$. А т.к. они равнобедренные, то CH - медиана, высота и биссектриса. Значит: $\angle ACH = \angle DCH = \frac{1}{2} \cdot \angle ACD = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$.

В $\triangle ETC$: $\angle TEC = 180^\circ - 110^\circ - 10^\circ = 60^\circ$.

Проведём $BH_1 \perp AE$: $BH_1 \cap AC = F$.

Тогда в $\triangle AFH_1$: $\angle AFH_1 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$; $\angle AFH_1 = \angle BFC = 60^\circ$ - как вертикальные.

Точки F и E видны из концов отрезка BC под одним углом $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ точки B, C, F, E - лежат на одной окр-ти.

$\angle HFE = 60^\circ$, т.к. FH_1 - высота и биссектриса в равноб. $\triangle AFE \Rightarrow \angle CFE = 180^\circ - \angle BFC - \angle H_1FE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$; $\angle BFE = \angle BFC + \angle CFE = 120^\circ$

Т.к. 4х-угольник FBCE - вписанный, то Σ противоположных углов $= 180^\circ$.

$\angle BCE + \angle BFE = 180^\circ$