№2

$$S=\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)$$

Если среди чисел x,y,z все 3 <0, тогда: возьмем числа $-x,-y,-z$ и получим то же самое выражение S.

$$S=-\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\cdot\left(-\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)\right)=$$

Если среди чисел x,y,z какие-то 2 меньше 0, тогда: взяв числа $(x;-y;-z)$ для $y<0;\ z<0;\ x>0$ мы получим то же самое S

Аналогично, если $x<0;\ y>0;\ z>0$, тогда возьмем $-x, y, z$ и получим S.

Значит можно считать, что числа $x,y,z>0$.

Тогда применим нер-во о средних:

$$\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\geq 3\sqrt[3]{xyz},$$

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

$$\Rightarrow S\geq 9\sqrt[3]{1}=9.$$

=.

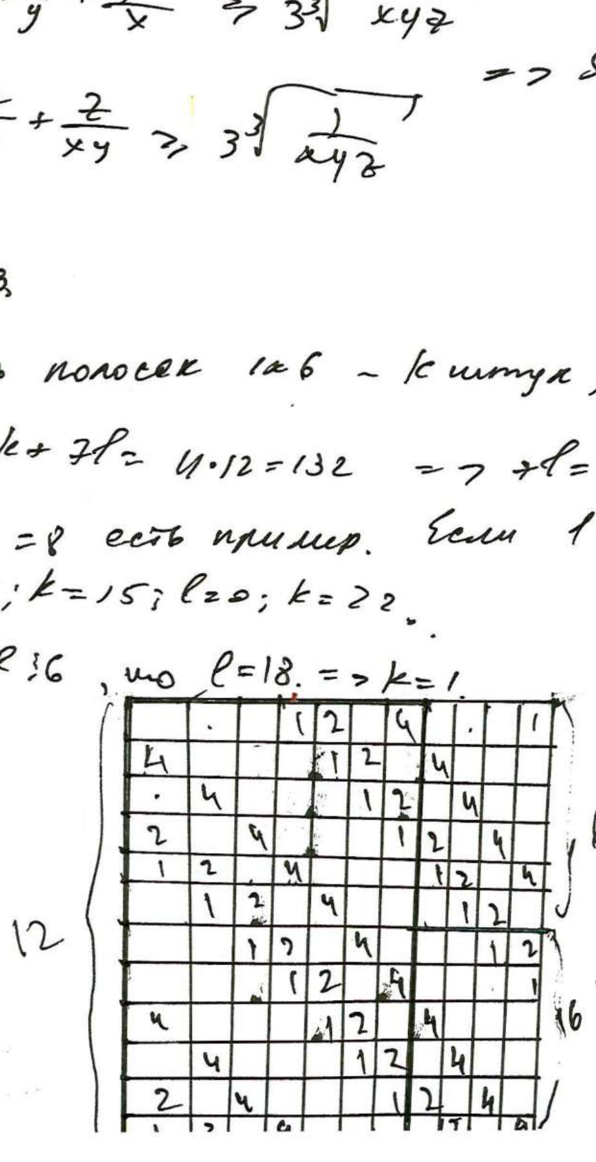
Ответ: 9

№1 Пусть полосок 1×6 – k штук, а 1×7 – l штук,

тогда: $6k+7l=11\cdot12=132\Rightarrow 7l=132-6k\ \vdots 6\Rightarrow l\ \vdots 6$.

Для $l=12$ и $k=8$ есть пример. Если $l<12$, тогда: полосок будет $\geq$, т.к. для $l=6;\ k=15;\ l=0;\ k=22$.

Если $l>12$ и $l\ \vdots 6$, то $l=18$. $\Rightarrow k=1$.



Раскрасим в 7 цветов по диагонали.
и выделим цвета 1; 2; 4

1 – 18 кл

2 – 18 кл

4 – 20 кл

Заметим, что 1×7 занимает по 1 кл. Н цвета, а 1×6 занимает по 1 кл. Н цвета, кроме кого-то.

продолжение №1

Тогда если $k=1$, то единств. полоска 1×6 не займет какую-то кл.

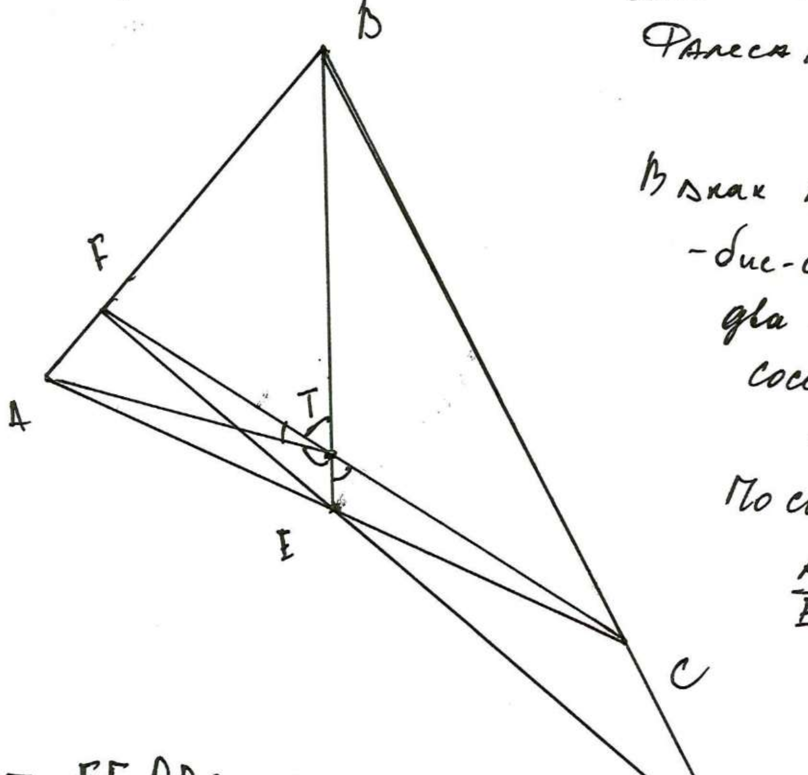
значит ~~цвета какой-то кл. будет~~ кол-во кл. кого-то цвета будет на 1 <, чем другого, но кол-во кл. цвета 1 – 18, цв. 4 – 20.

=> такого не м.б.

Ответ: 20.

Пример простой: заполняем прямоуг 12×7 и прям. 12×4 с помощью 12-ти 1×7 „друг на дружке" и с помощью 8ми 1×6.

№4 Док. сначала, что прямые ∩. Пусть это не так, значит $FE \parallel BC$.



Если $FE \parallel BC$, то по т. Фалеса: $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$.

В треуг $\triangle ATB$, ~~ATE~~, ATC TF, TE – бис-сы, т.к. делят $\angle 120^\circ$ на два $\angle$ по 60°. (внешний для соседнего $\triangle$.). Например: $\angle ATE = 180^\circ - \angle ATB = 60^\circ$.

По св-ву бис-с.:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AT}{TC} = \frac{AF}{FB} = \frac{AT}{TB}$$

$\Rightarrow TC = TB$

$\Rightarrow \triangle ATB = \triangle ATC$ по 2м сторонам и $\angle$ м/у ними (120°)

$\Rightarrow AC = AB$ – противоречие.

Значит $FE \cap BC = M$.

По т. Менелая для $\triangle ABC$ и прямой FM:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{FB} = 1. \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{AE \cdot FB}{CE \cdot AF}$$

Из $\triangle ATC$ и $\triangle ATB$ по св-ву бис-сы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{AE}{CE} &= \frac{AT}{TC} \\ \frac{FB}{AF} &= \frac{BT}{AT} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{BT}{TC}$$

Ч.т.д.

№3

Нет, не существует.

ломаная $A_1A_2\ldots A_5$

Предположим, что такая есть, тогда обозначим $\vec{a_1}, \vec{a_2} \ldots \vec{a_5}$ — как $\vec{A_1A_2}, \vec{A_2A_3} \ldots \vec{A_5A_1}$. Тогда, известно, что:

$\sum_{i=1}^{5} \vec{a_i} = 0$.

$|\vec a_1| = |\vec a_2| = \ldots = |\vec a_5|$, и $a_i \cdot a_{i+1} = 0$, где $i \in [1;4]$ и $i \in \mathbb{N}$. $\vec a_5 \vec a_1 = 0$.

Тогда рассмотрим:

$(\sum_{i=1}^{5} \vec a_i)^2 = (\vec a_1 + \ldots + \vec a_5)(\vec a_1 + \ldots + \vec a_5) = \sum_{i=1}^{i=5} a_i^2 +$

$+ \vec a_1 (\vec a_3 + \vec a_4) + \vec a_2 (\vec a_4 + \vec a_5) + \vec a_3 (\vec a_5 + \vec a_1) + \vec a_4 (\vec a_2 + \vec a_1) +$

$+ \vec a_5 (\vec a_2 + \vec a_3)$.

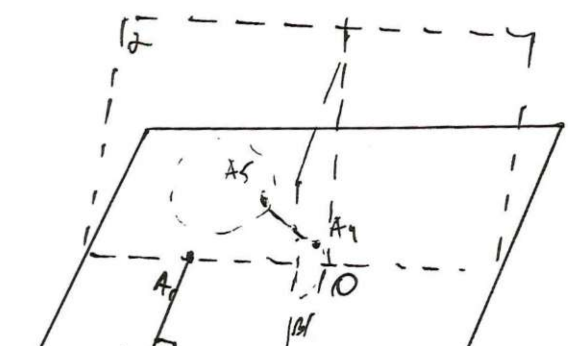
Посмотрим на каждое слагаемое вида: $a_1^2 + \vec a_1 (\vec a_3 + \vec a_4) =$

$(\vec a_1 + \ldots + \vec a_5) = \vec 0 \quad \cdot \vec a_1$

$a_1^2 + \vec a_1 \vec a_3 + \vec a_1 \vec a_4 = \vec 0$

$\vec a_1 (\vec a_1 + \vec a_3 + \vec a_4) = 0. \quad \vec a_1 =$

Пусть такая ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5$ существует, тогда рассмотрим плоскость, проходящая через 3 соседние т. A_1, A_2, A_3.



Поскольку $A_3A_4 \perp A_2A_3$, то A_3A_4 лежит в $(B) \perp A_2A_3$.

Аналогично $A_1A_5 \in \alpha$, где $\alpha \perp A_1A$

~~Пусть прямая~~ $A_4 \in B$
$A_5 \in \alpha$.

Поскольку $A_3A_5 = \sqrt{2}$ (из прямоуг. $\triangle A_5A_4A_3$). Аналогично $A_1A_4 = \sqrt{2}$,

=> ГМТ т. равноуд. от т. A_1 и $\in B$ — это окр. $\in B$.

Аналогично ГМТ т. A_5 — окр. $\in \alpha$, A_4A_5 — общ. касательная к этим сферам, т.к. $A_3A_4 \perp A_5A_4$ и $A_1A_5 \perp A_4A_5$. Поскольку сферы симметричны отн.: плоскости $\perp \gamma$ и $\parallel A_2O$, где $O \in \gamma$ и $O \in AB$,

=> A_5A_4 — симметричная сама себе отн. плоскости $\perp \gamma$ содерж.

$\Rightarrow A_5A_4 \parallel \gamma$., т.к. $A_4A_5 \parallel A_1A_3$. Но тогда в плоскости, проход. через т. A_1, A_5A_4, A_3 - получ. пар-мм. $\Rightarrow A_5A_4 = A_1A_3$

(*) противоречие

№5 Существует например тройка (1;8;8), (1;8;15)