

**Решения задач первого тура олимпиады  
«Формула Единства/Третье тысячелетие» – 2013**

**7 класс**

**Задача 1**

**1.** В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 9. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 4 числа. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы два из четырёх отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

**Решение.**

**Для 7 класса.** Достаточно взять две карточки и на одной отметить 1,2,3,4, на второй — 5,6,7,8. Если предположить, что карточка Марка совпадает с каждой из карточек Билла не более чем по одному числу, то на карточке Марка отмечены не больше одного из чисел от 1 до 4, не больше одного из чисел от 5 до 8 и ещё, возможно, число 9, то есть максимум три числа.

Одной карточки недостаточно: какие бы четыре числа Билл не отметил, у Марка могут оказаться четыре числа, ни одно из которых не отмечено Биллом.

**Задача 2**

**2.** На круглом торте стоит 10 свечей. Четырьмя разрезами торт разрезали на части, причём в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько свечей могло стоять в каждой из частей, которые образовались после первого разреза? Объясните, почему никакие другие варианты невозможны.

**Решение.** Заметим, что тремя разрезами нельзя разделить никакой кусок более чем на 7 частей. Действительно, первый разрез делит на две части, второй — максимум на 4. Третий разрез не может одновременно пройти через все четыре куска, образованных после второго разреза, поэтому проходит максимум через три из них; в результате число кусков увеличивается максимум на три, и всего их не больше, чем  $4+3=7$ .

Значит, после первого разреза число свечей в каждой части не превышает 7 (иначе вторым, третьим и четвёртым разрезом не удастся разделить свечи по отдельным кускам). Поэтому возможны только варианты  $5+5$ ,  $6+4$  и  $7+3$ . Все эти варианты действительно реализуются (примеры см. на рисунках, первый разрез выделен жирной линией).

**Задача 3**

**3.** У фокусника есть два комплекта по 7 карточек. На розовых карточках записаны целые числа от 0 до 6. На первой голубой карточке написано 1, а число на каждой следующей голубой карточке в 7 раз больше предыдущего. Фокусник раскладывает карточки попарно (розовую с голубой). Затем зрители перемножают числа в каждой паре и находят сумму всех 7 произведений. Фокус состоит в том, что в сумме должно получиться простое число. Подскажите фокуснику, какие карточки можно для этого объединить в пары (или докажите, что у него ничего не получится).

**Ответ:** фокус не получится.

**Доказательство.** Рассмотрим остатки от деления на 6. Так как 7 даёт при делении на 6 остаток 1, то и любая степень 7 тоже даст при делении на 6 остаток 1. Значит, вклад любой голубой карточки в остаток от деления суммы на 6 соответствует 1. Теперь удобно переставить слагаемые так, чтобы числа на розовых карточках шли в порядке возрастания. Получим сумму целых чисел от 0 до 6. Она делится на 3. Значит, как бы фокусник ни комбинировал карточки в пары, сумма всех 7 произведений всегда будет делиться на 3. Следовательно, она никогда не сможет оказаться простым числом.

**Задача 4**

**4.** У Кости есть шесть кубиков, каждая грань каждого кубика раскрашена в один из шести цветов. Все кубики раскрашены одинаково. Костя составил из кубиков столбик и смотрит на него с четырёх сторон. Может ли он сделать это таким образом, чтобы с каждой стороны все шесть граней были разного цвета?

**Решение.** Будем обозначать цвета числами от 1 до 6. Пусть у каждого кубика на двух противоположных гранях находятся цвета 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу). Тогда кубик можно ставить так, чтобы на четырёх видимых гранях (по кругу) оказывались цвета: а) 1234; б) 1536; в) 2546 (и в обратном порядке). Пример такого расположения показан на рисунке.

1	2	3	4
4	1	2	3
3	6	1	5
5	3	6	1
2	5	4	6
6	4	5	2

### Задача 5

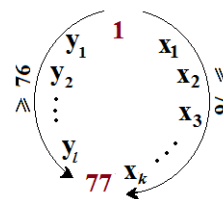
5. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 77. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

Ответ. 152 (для 7 класса)

**Решение** (для 77 чисел). Заметим, что где-то в круге стоят числа 1 и 77. Рассмотрим «путь» от 1 до 77 по часовой стрелке:  $1, x_1, x_2, \dots, x_k, 77$ . Заметим, что при прождении по этому пути число изменяется на 76, поэтому сумма модулей разностей не меньше 76 (формально:  $|77-x_k| + |x_k-x_{k-1}| + \dots + |x_2-x_1| + |x_1-1| \geq |77-1| = 76$ ).

Теперь рассмотрим путь между числами 1 и 77 «с другой стороны» (против часовой стрелки); сумма модулей разностей, стоящих там, также не меньше 76. Поэтому общая сумма модулей разностей не меньше 152.

Результат 152 достигается (например, при расстановке чисел по порядку).



### Задача 6

6. На продажу выставлены 20 книг по цене от 7 до 10 евро и 20 обложек по цене от 10 центов до 1 евро, причём все цены — разные. Смогут ли Том и Леопольд купить по книге с обложкой, заплатив одну и ту же сумму денег?

**Решение.** Из 20 книг и 20 обложек можно составить  $20 \cdot 20 = 400$  разных комплектов «книга+обложка». Стоимость любого комплекта не меньше, чем 7 евро 10 центов, так как самая дешёвая книга стоит не меньше 7 евро, а самая дешёвая обложка — не меньше 10 центов. По аналогичной причине стоимость любого комплекта не больше 11 евро.

Стоимость комплекта может принимать, таким образом, одно из 391 значения (от 7 евро 10 центов до 11 евро существует ровно 391 значение денежной суммы в европейской валюте). Поскольку 400 больше, чем 391, у каких-то двух комплектов «книга+обложка» стоимость окажется одинаковой.

Так не может случиться, что в этих двух комплектах книга будет одной и той же. (Если бы это случилось, стоимость обложки оказалась бы в двух комплектах одной и той же, иначе не получится одинаковой стоимости комплектов. Но если стоимость обложек в двух комплектах одинакова, то сами обложки одинаковы, то есть это один и тот же комплект.) Точно так же получается, что в этих комплектах обложка не может быть одной и той же. Поскольку и книги, и обложки в этих двух комплектах разные, Том и Леопольд смогут эти комплекты приобрести.