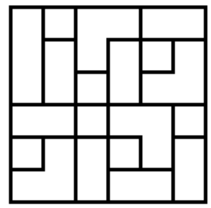
Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2017/2018 рік. Відбірковий етап
Задачі для 5 класу

1. Покажіть, як розрізати цей квадрат на чотири частини однакових форми та розміру, якщо різати можна тільки по проведених лініях.



2. Чи існують такі різні натуральні числа a і b, що a кратне b, $a+1$ кратне $b+1$, $a+2$ кратне $b+2$?

3. У магазині іграшок продаються сині автомобілі, сині автобуси, сині кораблі та зелені потяги. Купивши декілька іграшок, Рома виявив, що у його покупці половину синіх іграшок складають автомобілі, а половину сухопутних транспортних засобів — автобуси. Скільки кораблів купив Рома?

4. Залишившись удома на самоті, Андрій прислухався до крапель, які падали зі дзвоном на умивальник із нещільно закритого крану через однакові проміжки часу . Між першим і передостаннім ударами проминуло 48 хвилин, а між п'ятим і останнім ударами — 44 хвилини. Скільки усього ударів почув Андрій?

5. Назвемо натуральне число хорошим, якщо усі цифри, що входять в його запис, повторюються в ньому хоча б двічі (наприклад, 1522521 — хороше, а 1522522 — ні). Скільки існує трицифрових хороших чисел без нуля у записі?

6. Прямокутний лист 210 мм $\times$ 300 мм потрібно розрізати без залишку на прямокутники однакового розміру, у яких довжина вдвічі більше ширини. Якою може бути максимальна площа одного такого прямокутника? Відповідь обґрунтуйте.

7. Усі істоти на планеті Пандора діляться на лицарів (що говорять тільки правду), брехунів (що говорять тільки брехню) і тварин (що не говорять нічого). Якось сім мешканців Пандори (А, Б, В, Г, Д, Е, Є) вимовили по фразі.
   А: «Б і Г — брехуни».
   Б: «На Пандорі живуть білі леви».
   В: «Серед нас сімох рівно два лицарі».
   Г: «На Пандорі немає ані білих левів, ані зелених тигрів».
   Д: «Ми з А обоє брехуни».
   Е: «На Пандорі більше зелених тигрів, ніж золотих носорогів».
   Є: «Серед нас сімох рівно 5 брехунів».
   Встановіть, чи є на Пандорі золоті носороги.

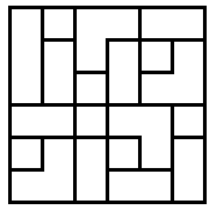
8. Рід Собакіних заснований деяким Тимофієм Собакіним. Відомо, що ніхто з чоловіків цього роду не помирав до 30 років. А ще у кожного чоловіка в цьому роді було 2 або 3 сини, причому кожен син народжувався, коли батьку вже було 25 років, але ще не виповнилося 30. Зараз у роді Собакіних 125 чоловіків (не рахуючи померлих). У якому столітті народився Тимофій Собакін?

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2017/2018 рік. Відбірковий етап

Задачі для 6 класу

1. Покажіть, як розрізати цей квадрат на чотири частини однакових форми та розміру, якщо різати можна тільки по проведених лініях.



2. У магазині іграшок продаються сині автомобілі, сині автобуси, сині кораблі та зелені потяги. Купивши декілька іграшок, Рома виявив, що у його покупці половину синіх іграшок складають автомобілі, а половину сухопутних транспортних засобів — автобуси. Скільки кораблів купив Рома?

3. Залишившись удома на самоті, Андрій прислухався до крапель, які падали зі дзвоном на умивальник із нещільно закритого крану через однакові проміжки часу . Між першим і передостаннім ударами проминуло 48 хвилин, а між п'ятим і останнім ударами — 44 хвилини. Скільки усього ударів почув Андрій?

4. Чи можна у таблиці з 5 рядків і 6 стовпчиків розмістити числа від 1 до 30 (кожне по одному разу) так, щоб у кожному стовпчику сума була меншою, ніж у кожному рядку?

5. Назвемо натуральне число хорошим, якщо усі цифри, що входять в його запис, повторюються в ньому хоча б двічі (наприклад, 1522521 — хороше, а 1522522 — ні). Скільки існує чотирицифрових хороших чисел без нуля у записі?

6. Прямокутний лист 210 мм $\times$ 297 мм потрібно розрізати без залишку на прямокутники однакового розміру, у яких довжина вдвічі більше ширини. Якою може бути максимальна площа одного такого прямокутника? Відповідь обґрунтуйте.

7. Рід Собакіних заснований деяким Тимофієм Собакіним. Відомо, що ніхто з чоловіків цього роду не помирав до 30 років. А ще у кожного чоловіка в цьому роді було 2 або 3 сини, причому кожен син народжувався, коли батьку вже було 25 років, але ще не виповнилося 30. Зараз у роді Собакіних 125 чоловіків (не рахуючи померлих). У якому столітті народився Тимофій Собакін?

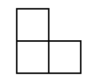
8. В одному парку є бамбук, який щоночі з незапам'ятних часів стає вище на одну і ту саму величину. Щодня садівник відрізує від нього цілу кількість метрів так, щоб частина, що залишилася, була заввишки менше метра. Довжину відрізаної частини він записує в спеціальний зошит.
   а) Чи можливо, щоб за десять послідовних днів у зошит було записано (саме у такому порядку) такі десять чисел: $7, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 7$?
   б) А чи можлива така послідовність: $7, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 7$?
   У кожному випадку обгрунтуйте відповідь.

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2017/2018 рік. Відбірковий етап

Задачі для 7 класу

1. Покажіть, як вирізати 12 трьохклітинних «кутиків» (див. малюнок) із дошки 8×8 так, щоб із частини дошки, що залишилася, не можна було вирізати більше жодного кутика. Кутики можна повертати.



2. Наведіть 7 різних натуральних чисел, сума яких дорівнює їх найменшому спільному кратному.

3. На стороні CD квадрата $ABCD$ відмічено точку E. Бісектриси кутів EAB і EAD перетинають сторони BC і CD у точках M і N відповідно. На промені AE відмічено таку точку F, що $AF = AB$. Доведіть, що F лежить на прямій MN.

4. Назвемо натуральне число хорошим, якщо усі цифри, що входять в його запис, повторюються в ньому хоча б двічі (наприклад, 1522521 — хороше, а 1522522 — ні). Скільки існує п'ятицифрових хороших чисел без нуля у записі?

5. Медіантою двох нескоротних дробів $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ називається нескоротний дріб, значення якого рівне $\frac{m+p}{n+q}$. Нехай z — медіанта для x і y, u — медіанта для x і z, а v — медіанта для y і z. Чи можна стверджувати, що z — медіанта для u і v?

6. У наведеній таблиці 12 чисел зафарбували в синій колір, а інші 12 — у червоний, причому сума синіх чисел у 4 рази більше, ніж сума червоних. Яке число залишилося незафарбованим?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

7. В одному парку є бамбук, який щоночі з незапам'ятних часів стає вище на одну і ту саму величину. Щодня садівник відрізує від нього цілу кількість метрів так, щоб частина, що залишилася, була заввишки менше метра. Довжину відрізаної частини він записує в спеціальний зошит.
а) Чи можливо, щоб за десять послідовних днів у зошит було записано (саме у такому порядку) такі десять чисел: $7, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 7$?
б) А чи можлива така послідовність: $7, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 7$?
У кожному випадку обгрунтуйте відповідь.

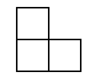
8. Квадратний ліс розбито на мільйон рівних квадратів, у центрі кожного з яких росте дерево. Деякі дерева можна спиляти, тоді замість них з'являються пні. Кажуть, що з одного пня видно інший, якщо на відрізку, що сполучає їх, немає жодного дерева (хоча на ньому можуть розташовуватися інші пні). Яку максимальну кількість дерев можна спиляти, щоб із жодного пня не було видно жоден інший пень? Вважайте, що дерева та пні не мають товщини.

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2017/2018 рік. Відбірковий етап

Задачі для 8 класу

1. Покажіть, як вирізати 12 трьохклітинних «кутиків» (див. малюнок) із дошки 8×8 так, щоб із частини дошки, що залишилася, не можна було вирізати більше жодного кутика. Кутики можна повертати.



2. На стороні CD квадрата $ABCD$ відмічено точку E. Бісектриси кутів EAB і EAD перетинають сторони BC і CD у точках M і N відповідно. На промені AE відмічено таку точку F, що $AF = AB$. Доведіть, що F лежить на прямій MN.

3. Назвемо натуральне число хорошим, якщо усі цифри, що входять в його запис, повторюються в ньому хоча б двічі (наприклад, 1522521 — хороше, а 1522522 — ні). Скільки існує шестицифрових хороших чисел без нуля у записі?

4. В одній країні використовують квадратні листи паперу стандартних форматів, що визначаються так : «Лист К0 має сторону в 1 метр. Якщо у квадрат К0 вписати коло, а в нього знову вписати квадрат, то цей другий квадрат матиме формат К1. Якщо вписати в К1 коло, а в нього знову вписати квадрат, то отримаємо аркуш формату К2. Аналогічно визначаються формати аж до К10». Петя побував у цій країні та купив там синій аркуш К0 та білі аркуші К1, К2, ..., К10 (усіх по одному). Чи зможе він розрізати білі аркуші на частини та повністю обклеїти ними синій аркуш (з одного боку)?

5. У наведеній таблиці 12 чисел зафарбували в синій колір, а інші 12 — у червоний, причому сума синіх чисел у 4 рази більше, ніж сума червоних. Яке число залишилося незафарбованим?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

6. Квадратний ліс розбито на мільйон рівних квадратів, у центрі кожного з яких росте дерево. Деякі дерева можна спиляти, тоді замість них з'являються пні. Кажуть, що з одного пня видно інший, якщо на відрізку, що сполучає їх, немає жодного дерева (хоча на ньому можуть розташовуватися інші пні). Яку максимальну кількість дерев можна спиляти, щоб із жодного пня не було видно жоден інший пень? Вважайте, що дерева та пні не мають товщини.

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c-a+1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a-b+1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

8. Для яких $n > 1$ знайдуться n різних натуральних чисел, сума яких дорівнює їх найменшому спільному кратному?

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2017/2018 рік. Відбірковий етап

Задачі для 9 класу

1. У магазині іграшок продаються сині автомобілі, сині автобуси, сині кораблі та зелені потяги. Купивши декілька іграшок, Рома виявив, що у його покупці половину синіх іграшок складають автомобілі, а половину сухопутних транспортних засобів — автобуси. Скільки кораблів купив Рома?

2. Медіантою двох нескоротних дробів $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ називається нескоротний дріб, значення якого рівне $\frac{m+p}{n+q}$. Наведіть приклад дев'яти нескоротних дробів, кожен із яких, окрім двох крайніх, слугував би медіантою для двох сусідніх з ним (у порядку зростання).

3. Чи можна відмітити на площині п'ять точок, що не лежать на одній прямій, так, щоб відстань між кожними двома з них виражалася цілим числом?

4. Назвемо натуральне число хорошим, якщо усі цифри, що входять в його запис, повторюються в ньому хоча б двічі (наприклад, 1522521 — хороше, а 1522522 — ні). Скільки існує семицифрових хороших чисел без нуля у записі?

5. Дано прямокутний рівнобедрений трикутник ABC із прямим кутом A. На сторонах AB і AC зовні $\triangle ABC$ побудовано рівні гострокутні трикутники ABP і ACQ ($PB = AQ$). Прямі PB і CQ перетинаються в точці M. Доведіть, що: а) $PA \perp QC$; б) $MA \perp PQ$.

6. Нехай $S(n)$ означає суму цифр натурального числа n. Скільки розв'язків має наступне рівняння?
$$S(n) + S^2(n) + \ldots + S^{2016}(n) = 2017^{2017}.$$
Тут $S^2(n) = S(S(n))$, $S^3(n) = S(S^2(n))$, $S^4(n) = S(S^3(n))$ тощо.

7. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} a\,(b-c+1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c-a+1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a-b+1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

8. Точки числової осі зафарбовано у 4 кольори: ті, що відповідають парним числам — чорні; ті, що непарним — білі; на інтервалах від чорних до білих (за зростанням) — червоні, а на інтервалах від білих до чорних — сині. У стартовий момент часу два коники знаходяться у різних точках A і B між 0 і 1. Через кожну одиницю часу обидва коники здійснюють стрибок, що подвоює їхню координату (перший — в точки $2A$, $4A$, $8A$ тощо, другий — в $2B$, $4B$, $8B$ тощо). Чи можна стверджувати, що у деякий момент часу коники опиняться у точках, зафарбованих у різні кольори?

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2017/2018 рік. Відбірковий етап

Задачі для 10 класу

1. Прямокутний лист 210 мм $\times$ 300 мм потрібно розрізати без залишку на прямокутники однакового розміру, у яких довжина вдвічі більше ширини. Якою може бути максимальна площа одного такого прямокутника? Відповідь обґрунтуйте.

2. Чи можна відмітити на площині п'ять точок, що не лежать на одній прямій, так, щоб відстань між кожними двома з них виражалася цілим числом?

3. Усі істоти на планеті Пандора діляться на лицарів (що говорять тільки правду), брехунів (що говорять тільки брехню) і тварин (що не говорять нічого). Якось сім мешканців Пандори (А, Б, В, Г, Д, Е, Є) вимовили по фразі.
   А: «Б і Г — брехуни».
   Б: «На Пандорі живуть білі леви».
   В: «Серед нас сімох рівно два лицарі».
   Г: «На Пандорі немає ані білих левів, ані зелених тигрів».
   Д: «Ми з А обоє брехуни».
   Е: «На Пандорі більше зелених тигрів, ніж золотих носорогів».
   Є: «Серед нас сімох рівно 5 брехунів».
   Встановіть, чи є на Пандорі золоті носороги.

4. У грі «Що? Де? Коли?» використовується круглий барабан, розбитий на 13 секторів. Спочатку в кожному секторі лежить питання. Стрілка, обертаючись випадковим чином, указує з однаковою ймовірністю на будь-який із секторів. У кожному раунді гри задається питання з сектора, на який указала стрілка; але якщо це питання вже було задане, то використовується наступне за годинниковою стрілкою незадане питання. Занумеруємо питання за годинниковою стрілкою від 1 до 13. Припустимо, що після декількох раундів поставлено питання 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Для якого з питань, що залишилися, ймовірність випасти в одному з двох найближчих раундів максимальна? (Вважайте, що найближчі два раунди будуть зіграні.)

5. Точка O — центр рівностороннього трикутника ABC. Коло, що проходить через точки A і O, перетинає сторони AB і AC в точках M і N відповідно. Доведіть, що $AN = BM$.

6. Як змінюється кількість коренів рівняння $x^2 + p = \sqrt{x - p}$ у залежності від значення параметра p?

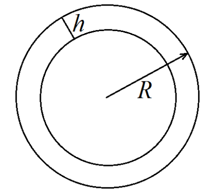
7. Точки числової осі зафарбовано у 4 кольори: ті, що відповідають парним числам — чорні; ті, що непарним — білі; на інтервалах від чорних до білих (за зростанням) — червоні, а на інтервалах від білих до чорних — сині. У стартовий момент часу два коники знаходяться у різних точках A і B між 0 і 1. Через кожну одиницю часу обидва коники здійснюють стрибок, що подвоює їхню координату (перший — в точки $2A$, $4A$, $8A$ тощо, другий — в $2B$, $4B$, $8B$ тощо). Чи можна стверджувати, що у деякий момент часу коники опиняться у точках, зафарбованих у різні кольори?

8. Два дійсні числа a і b такі, що $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$. Доведіть, що $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.

Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»

2017/2018 рік. Відбірковий етап

Задачі для 11 класу



1. Круглий тунель має зовнішній радіус $R = 200$ м і ширину $h = 30$ м. Чи можна повісити у ньому шість лампочок, які б освітили його повністю?

2. Чи можуть з перших ста членів арифметичної прогресії рівно 42 бути цілими числами?

3. У грі «Що? Де? Коли?» використовується круглий барабан, розбитий на 13 секторів. Спочатку в кожному секторі лежить питання. Стрілка, обертаючись випадковим чином, указує з однаковою ймовірністю на будь-який із секторів. У кожному раунді гри задається питання з сектора, на який указала стрілка; але якщо це питання вже було задане, то використовується наступне за годинниковою стрілкою незадане питання. Занумеруємо питання за годинниковою стрілкою від 1 до 13. Припустимо, що після декількох раундів поставлено питання 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Для якого з питань, що залишилися, ймовірність випасти в одному з двох найближчих раундів максимальна? (Вважайте, що найближчі два раунди будуть зіграні.)

4. Точка O — центр рівностороннього трикутника ABC. Коло, що проходить через точки A і O, перетинає сторони AB і AC в точках M і N відповідно. Доведіть, що $AN = BM$.

5. Знайдіть який-небудь відмінний від сталої многочлен $P(t)$, для якого правильна тотожність $P(\sin x) = P(\cos x)$.

6. Точки числової осі зафарбовано у 4 кольори: ті, що відповідають парним числам — чорні; ті, що непарним — білі; на інтервалах від чорних до білих (за зростанням) — червоні, а на інтервалах від білих до чорних — сині. У стартовий момент часу два коники знаходяться у різних точках A і B між 0 і 1. Через кожну одиницю часу обидва коники здійснюють стрибок, що подвоює їхню координату (перший — в точки $2A$, $4A$, $8A$ тощо, другий — в $2B$, $4B$, $8B$ тощо). Чи можна стверджувати, що у деякий момент часу коники опиняться у точках, зафарбованих у різні кольори?

7. Дано правильну призму і правильну біпіраміду, основами кожної з яких є правильний 25-кутник. Для кожного із цих тіл знайдено максимально можливу кількість вершин многокутника, що можна отримати при перерізі цього тіла площиною. Для якого із тіл результат більший? (Правильна біпіраміда з основою S — це об'єднання двох рівних правильних пірамід із загальною основою S і вершинами по різні сторони від площини основи.)

8. Два дійсні числа a і b такі, що $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$. Доведіть, що $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.